Serie 8

1. *Autonomisierungsinvariante Runge-Kutta Verfahren*

Ein konsistentes Runge-Kutta Verfahren heisst *autonomisierungsinvariant* wenn für dessen Koeffizienten

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1 \quad \text{(konsistent) und} \qquad c_i = \sum_{l=1}^{s} a_{il} \quad \text{für } i = 1, \dots, s$$

gilt. Diese Eigenschaft stellt sicher, dass man identische Ergebnisse für das autonomisierte ($\dot{y}(t) = f(y(t))$) und das urspüngliche nicht autnome ($\dot{y}(t) = f(t, y(t))$) AWP erhält.

a) Sind folgende Verfahren autonomisierungsinvariant?

(i) Das klassische Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(ii) Die verbesserte Polygonzug-Methode von Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

(iii) Das 2-Stufen Oliver Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & & \\ \frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

(iv) SDIRK Methode dritter Ordnung

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \text{wobei} \quad \gamma = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

b) Wenn ein Verfahren autonomisierungsinvariant ist, reicht es die Konsistenzordnung für autonome AWPe zu bestimmen. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens von Heun.

Hinweis: Die Rechnung aus Serie 7, Aufgabe 3 sollte sich wesentlich vereinfachen.

2. *Konsistenz- und Konvergenz-Ordnung*

Es sei das RK-ESV mit dem folgenden Butcher-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

a) Schreiben Sie einen Schritt des Verfahrens (in Stufenform).

b) Welche Konsistenzordnung hat das Verfahren?

c) Was können Sie für die Konvergenzordnung schlussfolgern?

Hinweis: Überlegen Sie sich den Unterschied zwischen Konsistenz- und Konvergenzordnung.

3. *Konsistenz Expliziter Runge-Kutta Verfahren*

Wir betrachten ein s-stufiges explizites Runge-Kutta Verfahren definiert durch das folgende Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & 0 & & & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & & a_{s,s-1} & 0 \\ \hline & b_1 & & \dots & b_s \end{array}$$

Verifizieren Sie, dass die Bedingung $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$ notwendig ist für die Konsistenz des Verfahrens.

Hinweis: Verifizieren Sie zuerst mittels Taylor-Reihenentwicklung, dass für den Schritt $y_0 \to y_1$ für die Stufen gilt: $k_i(h) = f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)$, $i = 1, \dots, s$.

Siehe nächstes Blatt!

4. *Toleranz Variieren*

Betrachten Sie folgendes AWP

$$\dot{y}(t) = \lambda \left(y(t) - \frac{t^2}{1+t^2} \right) + \frac{2t}{(1+t^2)^2}, \quad y(0) = 0, \tag{1}$$

mit $\lambda = 10$ auf dem Zeitintervall $[0, 5]$.

a) Verifizieren Sie, dass

$$y(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \tag{2}$$

das AWP (1) löst.

b) Lösen Sie das AWP mit `ode45` und folgenden absoluten/relativen Toleranzen:

$$(\tau_{abs}, \tau_{rel}) = (10^{-6}, 10^{-3}),\ (10^{-6}, 10^{-6}),\ (10^{-8}, 10^{-8}),\ (10^{-10}, 10^{-10}).$$

Was beobachten Sie?

Hinweis: Verwenden Sie das MATLAB-Template `tolVar.m`.

c) Sei nun $\lambda = -10$. Geben Sie die exakte Lösung das AWP an.

d) Wiederholen Sie **b)** mit $\lambda = -10$.

e) Erklären Sie das beobachtete Verhalten in **b)** und **c)**.

Abgabe: Online bis **Freitag** den 05.05.2023 unter `sam-up.math.ethz.ch`.