

# Lösung 11

## 1. Stabilitäts-funktionen und Gebiete

### a) (i) Expliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + hf(t_j, y_j) \\ &= y_j + h\lambda y_j \\ &= (1 + h\lambda)y_j. \end{aligned}$$

Deshalb, für  $z = h\lambda$ , ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = 1 + z.$$

### (ii) Impliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Wir haben

$$k_1 = f(t_j + h, y_j + hk_1) = \lambda(y_j + hk_1) = \lambda y_j + h\lambda k_1 \iff (1 - h\lambda)k_1 = \lambda y_j,$$

und daher

$$k_1 = y_j \left( \frac{\lambda}{1 - h\lambda} \right).$$

Dann

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + hk_1 \\ &= y_j + hy_j \left( \frac{\lambda}{1 - h\lambda} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{h\lambda}{1 - h\lambda} \right) y_j \\ &= \left( \frac{1}{1 - h\lambda} \right) y_j. \end{aligned}$$

Deshalb, für  $z = h\lambda$ , ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \frac{1}{1-z}.$$

(iii) Heun Verfahren

|               |               |
|---------------|---------------|
| 0             |               |
| 1             | 1             |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Wir haben

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}(f(t_j, y_j) + f(t_j + h, y_j + hf(t_j, y_j))) \\ &= y_j + \frac{h}{2}(\lambda y_j + \lambda(y_j + h\lambda y_j)) \\ &= y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j + \frac{h^2}{2}\lambda^2 y_j \\ &= (1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2)y_j. \end{aligned}$$

Deshalb, für  $z = h\lambda$ , ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2.$$

(iv) Klassisches Runge-Kutta Verfahren

|               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0             |               |               |               |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |               |               |
| $\frac{1}{2}$ | 0             | $\frac{1}{2}$ |               |
| 1             | 0             | 0             | 1             |
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

Wir haben

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j) &&= \lambda y_j, \\ k_2 &= f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1) &&= \lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j), \\ k_3 &= f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2) &&= \lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j)), \\ k_4 &= f(t_j + h, y_j + hk_3) &&= \lambda(y_j + h\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j))). \end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Dann

$$\begin{aligned}y_{j+1} &= y_j + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right) \\&= y_j + h\left(\frac{1}{6}\lambda y_j + \frac{2}{6}\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j\right) + \frac{2}{6}\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j\right)\right)\right. \\&\quad \left. + \frac{1}{6}\lambda\left(y_j + h\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j\right)\right)\right)\right) \\&= y_j + \frac{1}{6}h\lambda y_j + \frac{2}{6}h\lambda y_j + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 y_j + \frac{2}{6}h\lambda y_j + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 y_j + \frac{1}{12}h^3\lambda^3 y_j \\&\quad + \frac{1}{6}h\lambda y_j + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 y_j + \frac{1}{12}h^3\lambda^3 y_j + \frac{1}{24}h^4\lambda^4 y_j \\&= \left(1 + \frac{1}{6}h\lambda + \frac{2}{6}h\lambda + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 + \frac{2}{6}h\lambda + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 + \frac{1}{12}h^3\lambda^3\right. \\&\quad \left. + \frac{1}{6}h\lambda + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 + \frac{1}{12}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4\right)y_j \\&= \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4\right)y_j.\end{aligned}$$

Deshalb, für  $z = h\lambda$ , ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4.$$

(v) Implizite Mittelpunktsregel

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Wir haben

$$k_1 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right) = \lambda\left(y_j + \frac{h}{2}k_1\right) = \lambda y_j + \frac{h}{2}\lambda k_1 \iff \left(1 - \frac{h}{2}\lambda\right)k_1 = \lambda y_j,$$

and hence

$$k_1 = y_j \left(\frac{\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda}\right) = y_j \left(\frac{2\lambda}{2 - h\lambda}\right).$$

Dann

$$\begin{aligned}y_{j+1} &= y_j + hk_1 \\&= y_j + hy_j \left(\frac{2\lambda}{2 - h\lambda}\right) \\&= \left(1 + \frac{2h\lambda}{2 - h\lambda}\right)y_j \\&= \left(\frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda}\right)y_j.\end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

Deshalb, für  $z = h\lambda$ , ist die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \left( \frac{2+z}{2-z} \right).$$

b) Siehe `stabgebiete.m` und `draw_stabfunc.m`. Die Stabilitätsgebiete sind schwarz lackiert.

c) Wir benötigen:

(i)  $|1+x| < 1 \iff -1 < 1+x < 1 \implies -2 < x < 0.$

(ii)  $\left| \frac{1}{1-x} \right| < 1 \iff 1 < |1-x|.$

Damit

$$1 < 1-x \implies x < 0 \quad \text{und} \quad 1 < x-1 \implies x > 2.$$

(iii)  $\left| 1+x+\frac{1}{2}x^2 \right| < 1 \iff 1+x+\frac{1}{2}x^2 < 1 \iff x(x+2) < 0 \implies -2 < x < 0.$

(iv)  $\left| 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4 \right| < 1 \iff x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4 < 0.$

Siehe `stab_klassisches_RK.m`. Wir haben eine Null bei  $x \approx -2.7853$  und es ist klar, dass  $x = 0$  auch eine Null ist. Da  $g(x)$  ausserhalb dieser Region zunimmt, das gilt das Stabilitätsintervalle is  $-2.7853 < x < 0.$

(v)  $\left| \frac{2+x}{2-x} \right| < 1 \iff |2+x| < |2-x|.$  Es ist klar gilt dies nur für  $x < 0.$

d) Definiere

$$\lambda = -1000 + \pi i.$$

We want to determine  $h$  such that

$$|g(z)| = |g(h\lambda)| < 1, \quad \text{or equivalently} \quad |g(h\lambda)|^2 < 1.$$

(i) We have

$$g(h\lambda) = 1 + h\lambda.$$

Therefore,  $h$  should be such that

$$1 > |g(h\lambda)|^2 = |1 + h\lambda|^2 = |1 + h(-1000 + \pi i)|^2 = (1 - 1000h)^2 + (\pi h)^2.$$

Hence we require that

$$h < \frac{2000}{1000000 + \pi^2}.$$

(ii) We have

$$g(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda}. \tag{1}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Therefore,  $h$  should be such that

$$\begin{aligned}
 1 > |g(h\lambda)|^2 &= \left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right|^2 = \left| \frac{1}{1 + 1000h - h\pi i} \cdot \frac{1 + 1000h + h\pi i}{1 + 1000h + h\pi i} \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1 + 1000h}{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2} + i \frac{-h\pi}{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2} \right|^2 \\
 &= \left( \frac{1 + 1000h}{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2} \right)^2 + \left( \frac{-h\pi}{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2} \right)^2 \\
 &= \frac{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2}{((1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2)^2} \\
 &= \frac{1}{(1 + 1000h)^2 + (h\pi)^2}.
 \end{aligned}$$

This holds when  $h < -\frac{2000}{1000000 + \pi^2}$  or  $h > 0$ . As the step size must be positive this means we require that

$$h > 0.$$

(iii)-(v) First we rewrite the stability condition  $|g_\lambda(h)| < 1$  as

$$G(h) := 1 - |g_\lambda(h)| > 0.$$

Then we use a root finding procedure to precisely locate the points where  $G(h) = 0$ . Siehe `grenzen_schrittweite_h.m`.

(iii) We require  $h < 0.002$ .

(iv) We require  $h < 0.0028$ .

(v)  $h$  can be any positive number.

e) Siehe `schnelle_oszillation_verfall.m` und Abbildung 1.

## 2. Stabilitäts-funktionen für RK-ESV

a) Wir wenden ein explizites  $s$ -stufiges RK-ESV auf das Dahlquist Test-AWP Problem  $\dot{y} = \lambda y$  an. Es gilt

$$k_i = f(t_0 + hc_i, y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) = \lambda (y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \quad 1 \leq i \leq s.$$

Wir behaupten, dass  $k_i = p_i(h\lambda)\lambda y_0$ , wobei  $p_i$  ein Polynom ist. Für  $i = 1$  haben wir  $k_1 = \lambda y_0$  und die Behauptung stimmt. Nehmen wir an, dass die Behauptung

**Bitte wenden!**

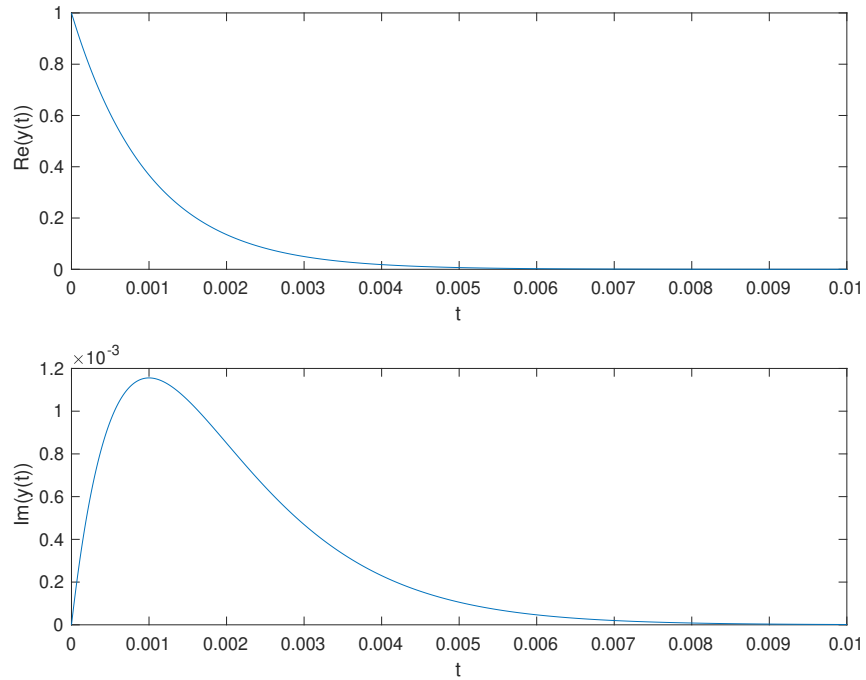


Abbildung 1: Realteil und den Imaginärteil der Lösung  $y(t)$  aus d).

für  $i$  gilt. Dann

$$\begin{aligned}
 k_{i+1} &= f(t_0 + hc_{i+1}, y_0 + h \sum_{j=1}^i a_{i+1,j} k_j) \\
 &= \lambda(y_0 + h \sum_{j=1}^i a_{i+1,j} k_j) \\
 &= \lambda(y_0 + h \sum_{j=1}^i a_{i+1,j} p_j(h\lambda) \lambda y_0) \\
 &= (1 + h\lambda \sum_{j=1}^i a_{i+1,j} p_j(h\lambda)) \lambda y_0 \\
 &=: p_{i+1}(h\lambda) \lambda y_0.
 \end{aligned}$$

Da eine endliche Kombination von Polynomen wieder ein Polynom ist, folgt die

**Siehe nächstes Blatt!**

Behauptung. Nun ist

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \\ &= y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i p_i(h\lambda) \lambda y_0 \\ &= (1 + h\lambda \sum_{i=1}^s b_i p_i(h\lambda)) y_0,\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Stabilitätsfunktion ein Polynom in  $h\lambda$  ist.

- b) Nein, da die Stabilitätsfunktion ein Polynom in  $h\lambda$  ist, ist das Stabilitätsintervall beschränkt und  $|g(z)| = |1 + z \sum_{i=1}^s b_i p_i(z)| < 1$  gilt nicht für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) < 0$ .

### 3. L-Stabil

Ein Verfahren ist L-Stabil falls es A-Stabil ist und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} g(z) = 0,$$

mit  $z = h\lambda$ . Aus der Aufgabe 1 haben wir für die implizite Mittelpunkt Methode die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \frac{2+z}{2-z}$$

und A-Stabilität. Wir haben

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{2+z}{2-z} = -1,$$

somit ist die implizite Mittelpunktmethode nicht L-Stabil.

### 4. Lineare Mehrschrittverfahren : BDF-Verfahren

Bestimme das Interpolationspolynom durch  $y_{j+1}, y_j, y_{j-1}$ :

$$p_2(t) = \frac{y_{j-1}}{2h^2}(t-t_j)(t-t_{j+1}) - \frac{y_j}{h^2}(t-t_{j-1})(t-t_{j+1}) + \frac{y_{j+1}}{2h^2}(t-t_{j-1})(t-t_j)$$

Die Ableitung zur Zeit  $t_{j+1}$  ist

$$\frac{d}{dt} p_2(t)|_{t=t_{j+1}} = \frac{y_{j-1}}{2h} - 2\frac{y_j}{h} + \frac{3}{2}\frac{y_{j+1}}{h} \approx \dot{y}(t)$$

**Bitte wenden!**

Und damit

$$\frac{1}{h} \left( \frac{1}{2}y_{j-1} - 2y_j + \frac{3}{2}y_{j+1} \right) = f(t_{j+1}, y_{j+1})$$

Oder

$$y_{j+1} - \frac{4}{3}y_j + \frac{1}{3}y_{j-1} = \frac{2}{3}hf(t_{j+1}, y_{j+1})$$

Dann erhalten wir  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = -\frac{4}{3}$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{3}$  und  $\beta_0 = \frac{2}{3}$ .