Dr. R. Käppeli
L. Rueff

Serie 12

1. *Lineares homogenes System*

Gegeben folgendes System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t),$$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{869}{10} & \frac{1521}{5} \\ 0 & -\frac{227}{2} & \frac{591}{2} \\ 0 & \frac{591}{2} & -\frac{1803}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP) mit den Anfangswerten $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = 6$ und $y_3(t) = 2$ auf dem Zeitintervall $t \in [0, 2]$.

a) Lösen Sie obiges AWP analytisch.
Hinweis: Entkoppeln Sie dieses System durch diagonalisieren der Matrix A (wozu Sie ein Computeralgebrasystem verwenden können).

b) Lösen Sie obiges AWP numerisch mit dem verbesserten Euler Verfahren für $h = 2^{-i}$, $i = 0, 1, 2, ..., 12$, und berechnen den globalen Diskretisierungsfehler (GDF) zur Zeit $t = 2$. Erklären Sie den Verlauf des GDFs als Funktion der Schrittweite h.
Hinweis: Sie finden das bereits implementierte verbesserte Euler Verfahren in `verbEuler.m`.

2. *Steifes nichtlineares AWP*

Wir betrachten (wiedereinmal!) die Van der Pol Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) = \mu(1 - y(t)^2)\dot{y}(t) - y(t)$$

mit $\mu = 1000$ für $t \in [0, 3000]$ mit den Anfangswerten

$$y(0) = 2 \quad , \quad \dot{y}(0) = 0.$$

a) Lösen Sie obiges Anfangswertproblem numerisch mit den MATLAB Lösern `ode45` und `ode23s`. Was fällt Ihnen auf?
Hinweis: Arbeiten Sie im Template `StiffVanDerPol.m`.
Beachte: Die Rechnung mit `ode45` kann durchaus ein paar Minuten dauern.

b) Berechnen Sie den Steifigkeitsparameter S zur Anfangszeit und Anfangswerten. Ist dieses Problem lokal steif?

c) Berechnen Sie den Steifigkeitsparameter S in jedem Zeitschritt für die numerische Lösung mit `ode23s`. Was beobachten Sie?

3. *Imaginäre Eigenwerte*

Wir betrachten folgende Differentialgleichung

$$\ddot{u} + \alpha^2 u = 0$$

wobei $\alpha = 1$. Durch einführen von $y_1 = u$ und $y_2 = \dot{u}/\alpha$ erhält man folgendes äquivalente System erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese schiefsymmetrische Matrix (d.h. $A^T = -A$) hat imaginäre Eigenwerte $\pm\alpha i$.

Das MATLAB -Skript `imag_ew.m` löst das Anfangswertproblem für $\mathbf{y} = (1,0)^T$ und $t \in [0, 100]$ numerisch mit zwei bekannten Verfahren und plottet die Lösung.

Führen Sie das Skript aus. Was fällt Ihnen auf? Erklären Sie das beobachtete.
Hinweis: Betrachten Sie die Stabilitätsgebiete der benutzten Verfahren (s. VL oder S11A01) und beachten Sie, dass die Eigenwerte des Problems rein imaginär sind.

4. *Wärmeleitungsgleichung*

Das MATLAB -Skript `heat.m` löst das Differentialgleichungssystem von Beispiel (14) in Kapitel 5 der Vorlesung mit 4 verschiedenen Verfahren:

1. Expliziter Euler
2. MATLAB 's `ode45`
3. MATLAB 's `ode23s`
4. Implizite Mittelpunktsregel (welche in diesem Kontext auch als das Crank-Nicolson Verfahren bekannt ist)

Siehe nächstes Blatt!

Führen Sie das Skript für verschiedene Gitter-Grössen $M = 25, 50, 100, 200$ aus. Welches Verfahren ist am schnellsten?

Abgabe: Online bis **Freitag**, den 02.06.2023 unter `sam-up.math.ethz.ch`.