Dr. R. Käppeli D-ITET, D-MATL Sommer 2019

Prüfung Numerische Methoden

Name : ....

Vorname : ....

Legi-Nummer : ....

Studiengang : ....

Datum : 20.08.2019

1	2	3	4	5	Punkte
10	10	10	10	10	50

Wichtige Hinweise

- Die Prüfung dauert 90 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: 5 A4-Blätter doppelseitig (=10 Seiten) eigenhändig und handschriftlich verfasste Zusammenfassung, nicht ausgedruckt, nicht kopiert. Sonst keine Hilfsmittel zugelassen.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Unbegründete Lösungen (außer bei Multiple-Choice-Aufgaben falls nicht explizit gefordert) werden nicht akzeptiert!
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch. Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift. Verwenden Sie einen Stift mit blauer oder schwarzer Farbe (keinesfalls rot oder grün).
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben:

1. *Wahr oder Falsch* [**10 Punkt(e)**]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
$\times$	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen $\times$ erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt **2 Punkte**, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt **-2 Punkte**. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
1) Das folgende Nullstellenproblem $$\begin{aligned} +2x + 5y &= -8 \\ -2x - 5y &= +8 \end{aligned}$$ besitzt eine eindeutige Lösung und das Newton-Verfahren konvergiert nach nur einer Iteration.		
2) Für die Trapezregel $$Q[f] = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$ gilt $$I[x^3] = \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0 = Q[x^3].$$ Deshalb hat die Trapezregel eine Ordnung von mindestens $s = 4$.		
3) Das folgende Anfangswertproblem $$\dot{y}(t) = 3(y(t)-1)^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 1,$$ für $t \in [0,1]$ hat eine eindeutige Lösung.		

Bitte wenden!

		wahr	falsch
4)	Gegeben folgendes Butcher-Tableau eines Runge-Kutta Einschrittverfahrens: $\begin{array}{c\|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$ Für ein Anfangswertproblem der Form $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,$ mit $\mathbf{y}_0, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, muss mann in obigem Verfahren in jedem Schritt ein System von n (möglicherweise nichtlineare) Gleichungen lösen.		
5)	Für die Funktion $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ konvergiert das Bisektions-Verfahren mit Startwerten $a = -1$ und $b = 2$ gegen die Unstetigkeit bei $x = 0$.		

2. *Fragen aus den Übungen* **[10 Punkt(e)]**

a) **[3 Punkt(e)]** Wir betrachten die folgende Quadraturregel

$$Q[f] = \alpha f(0) + \beta f(1/2) + \gamma f(1)$$

zur Approximation von $I[f] = \int_0^1 f(x)dx$.

i) Bestimmen Sie die Konstanten α, β and γ so, dass der Genauigkeitsgrad dieser Regel so hoch wie möglich ist.

ii) Transformieren Sie die Quadraturregel auf ein beliebiges Intervall $I = [a, b]$.

b) **[3 Punkt(e)]** Geben Sie für das Runge-Kutta Einschrittverfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right), \\ y_{j+1} &= y_j + hk_1, \end{aligned}$$

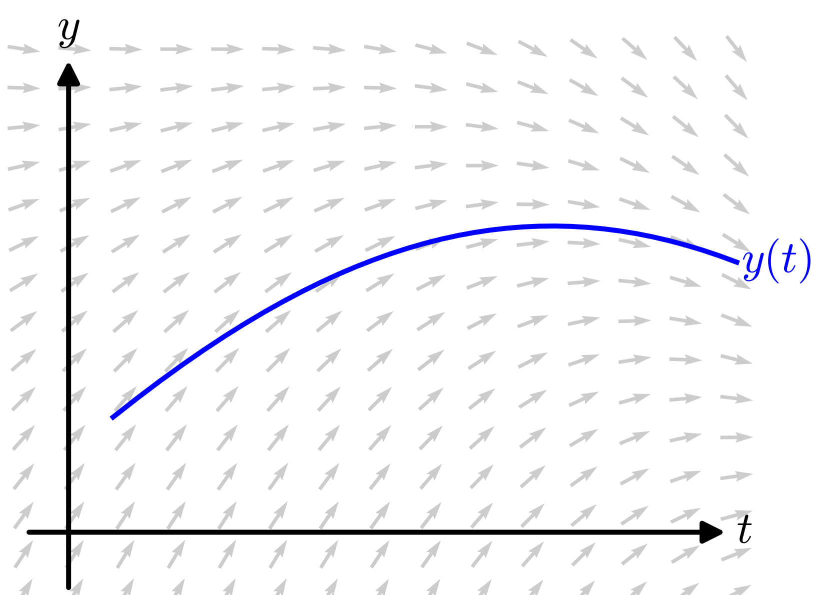
an ob es (i) explizit oder implizit ist, (ii) das zugehörige Butcher-Tableau und (iii) skizzieren Sie das Verfahren im Richtungsfeld.

Schreiben Sie Ihre Antworten direkt hier:

(i)

(ii)

(iii) Richtungsfeld:



Bitte wenden!

c) [2 Punkt(e)] Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion für folgendes Verfahren:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}.$$

d) [2 Punkt(e)] Es ist bekannt, dass die Ladung Q eines Kondensators in einem RLC Schaltkreis die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = E(t)$$

erfüllt. Hier ist L die Induktivität , R der Widerstand, C die Kapazität und $E(t)$ die Anregung. Die Anfangswerte seien gegeben durch $Q(0) = Q_0$ und $\dot{Q}(0) = I_0$.

Schreiben Sie dieses Anfangswertproblem zweiter Ordnung als ein Anfangswertproblem erster Ordnung.

3. *Anfangswertproblem und Stabilität* [**10 Punkt(e)**]

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\varepsilon y_1^2 + \varepsilon y_2 + \cos(t) \\ \dot{y}_2 &= -\frac{1}{\varepsilon} y_2^2 - t, \end{aligned} \tag{1}$$

für $t \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$ und $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

Zur numerischen Lösung dieses AWPs verwenden wir das durch folgendes Butcher-Tableau gegebene Einschrittverfahren (ESV)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} . \tag{2}$$

a) [**1 Punkt**] Schreiben Sie dieses ESV in Stufenform.

b) [**2 Punkt(e)**] Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion dieses ESV.

c) [**3 Punkt(e)**] Berechnen Sie das Stabilitätsinterval dieses ESV.

d) [**3 Punkt(e)**] In welchen Intervall muss die Schrittweite gewählt werden um das AWP im ersten Schritt stabil zu lösen?

e) [**1 Punkt**] Wählen Sie ein alternatives ESV welches für das AWP (1) und beliebig kleinen ε besser geeignet ist als das ESV (2). Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden!

4. *Mehrschrittverfahren* **[10 Punkt(e)]**

a) [5 Punkt(e)] Wir betrachten folgendes Mehrschrittverfahren:

$$y_{j+1} = y_{j-1} + 2hf(t_j, y_j). \tag{3}$$

Berechnen Sie die Konsistenzordnung dieses Verfahrens.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst den lokalen Diskretisierungsfehler

$$e_{j+1} = y(t_{j+1}) - y(t_{j-1}) - 2hf(t_j, y(t_j)) \tag{4}$$

durch einsetzen der exakten Lösung in das Verfahren (3). Verwenden Sie hierzu die Taylor-Entwicklung. Schlussfolgern Sie aus dem lokalen Diskretisierungsfehler die Konsistenzordnung.

b) [5 Punkt(e)] Wir betrachten das k-Schritt BDF Verfahren:

$$\sum_{l=0}^{k} \alpha_l y_{j+1-l} = h\beta_0 f(t_{j+1}, y_{j+1}).$$

i) [**2 Punkt(e)**] Bestimmen Sie das Interpolationspolynom durch die Stützpunkte (t_{j+1}, y_{j+1}), (t_j, y_j) und (t_{j-1}, y_{j-1}).
Die Stützstellen sind äquidistant verteilt, d.h. $t_{j+1} - t_j = t_j - t_{j-1} = h$.

ii) [**3 Punkt(e)**] Konstruieren Sie das 2-Schritt BDF Verfahren mit Ihrem Interpolationspolynom aus i).

5. *Quadratur und Newton-Verfahren* [**10 Punkt(e)**]

Wir betrachten folgende Quadraturregel auf dem Referenzintervall

$$Q[f] = f(x_1) + f(x_2) \approx \int_{-1}^{+1} f(x)dx = I[f]$$

wobei die Knoten x_1 und x_2 noch zu bestimmen sind.

a) [**2 Punkt(e)**] Stellen Sie die Gleichungen für die Knoten auf damit Q einen Genauigkeitsgrad von mindestens $q = 2$ hat.

b) [**2 Punkt(e)**] Die Knoten sollen nun mit dem Newton-Verfahren iterativ bestimmt werden. Berechnen Sie alle nötigen Komponenten um das Newton-Verfahren anzuwenden.

c) [**1 Punkt**] Ist $x_0 = (1 \;\; 1)^\top$ eine gute Wahl für den Anfangswert? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) [**5 Punkt(e)**] Vervollständigen Sie folgende MATLAB Implementierung des Newton-Verfahrens für das Nullstellenproblem aus b):

```
function x = newton(x0, max_iter, tol)

% Parameters: x0       ... Startwert fuer Parameter
%             max_iter ... maximale Anzahl von Iterationen
%             tol      ... Toleranz
%
% Returns: x

  %Initialisierung
  x = x0;

  %Komponenten im Newton-Verfahren




  for i=1:max_iter

    x_old =

    %Compute update
    s =

    %Abbruchkriterium
    if (                                          )
      break
    end

    %Update iteration
    x =

  end

end
```

Siehe nächstes Blatt!

Verwenden Sie die folgende Box um zusätzliche Funktionen zu implementieren. Sie können davon ausgehen, dass der Inhalt dieser Box in der selben Datei wie obige Box steht.