Dr. R. Käppeli D-ITET, D-MATL Sommer 2021

Prüfung Numerische Methoden

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Numerische Methoden	
Datum	28.08.2021	

1	2	3	4	5	Punkte
10	15	10	10	5	50

Wichtige Hinweise

- Die Prüfung dauert 90 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: 5 A4-Blätter doppelseitig (=10 Seiten) eigenhändig und handschriftlich verfasste Zusammenfassung, nicht ausgedruckt, nicht kopiert. Sonst keine Hilfsmittel zugelassen.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch. Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift. Verwenden Sie einen Stift mit blauer oder schwarzer Farbe (keinesfalls rot oder grün).
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Unbegründete Lösungen (ausser bei Multiple-Choice-Aufgaben falls nicht explizit gefordert) werden nicht akzeptiert!
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben:

1. *Wahr oder Falsch* [**10 Punkt(e)**]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
$\times$	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen $\times$ erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt **2 Punkte**, falsch gesetzte Kreuzchen geben *keine* negative Punkte.

	wahr	falsch
1) Das folgende Anfangswertproblem (AWP) $$\dot{y}(t) = 2\sqrt{y^2+5},\ y(0) = 0$$ genügt den Vorrausetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf.		
2) Das Bisektions-Verfahren mit Startintervall $[0, 2]$ findet die eindeutige Nullstelle der Gleichung $$e^x - e = 0$$ in nur einer Iteration.		
3) Da die Mittelpunktsregel auf einem Interpolationspolynom nullten Grades basiert hat Sie einen Genauigkeitsgrad von $q = 0$.		
4) Das durch folgendes Butcher-Tableau gegebene Runge-Kutta Einschrittverfahren ist konsistent $$\begin{array}{c\|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$		
5) Implizite Einschrittverfahren sind immer effizienter wie explizite Einschrittverfahren.		

Bitte wenden!

2. *Fragen aus den Übungen* **[15 Punkt(e)]**

a) [**3 Punkt(e)**] *(Serie 4, Aufgabe 3)*
In dieser Aufgabe wollen wir eine adaptive Quadratur Methode zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx$$

entwickeln basierend auf der Trapezregel. Wie in der Vorlesung diskutiert, benötigt man dafür einen Fehler-Schätzer. Hierzu vergleichen wir das Resultat der Trapezregel

$$Q_1[f] = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

mit dem Resultat der zusammengesetzten Trapezregel (mit zwei Teil-Intervallen)

$$Q_1^2[f] = \frac{b-a}{4}\left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Bestimmen Sie den Fehler-Schätzer $E^2[f] = |Q_1^2[f] - I[f]|$.

b) [**2 Punkt(e)**] *(Serie 5, Aufgabe 3)*
Autonomisieren Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -y(t) + (1 - \sin(t))e^{-5t},\\ y(0) &= 7.\end{aligned}$$

c) [**4 Punkt(e)**] *(Serie 7, Aufgabe 1)*
Geben Sie für das folgende Runge-Kutta Einschrittverfahren an ob es (i) explizit oder implizit ist, (ii) das zugehörige Butcher-Tableau und (iii) skizzieren Sie das Verfahren im Richtungsfeld:

$$\begin{aligned}k_1 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right),\\ y_{j+1} &= y_j + hk_1.\end{aligned}$$

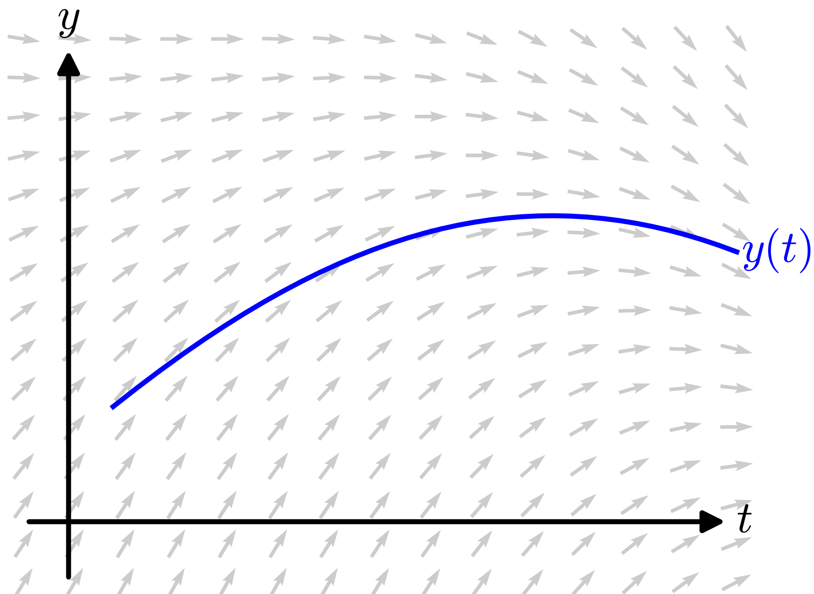
Schreiben Sie Ihre Antworten direkt hier:

(i)

(ii)

(iii) Richtungsfeld:

Siehe nächstes Blatt!



d) [**1 Punkt(e)**] *(Serie 8, Aufgabe 3)*
Ist folgendes SDIRK Verfahren autonomisierungsinvariant

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \text{wobei} \quad \gamma = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}?$$

Bitte wenden!

e) [**5 Punkt(e)**] *(Serie 10, Aufgabe 3)*
Vervollständigen Sie folgende MATLAB Implementierung einer adaptiven Schrittweitensteuerung:

```
function [t,y] = adaptode(f,t0,T,y0,h0,atol,rtol)

% Parameters: f    ... rechte Seite f(t,y(t)) der gew. Diff.-Gl.
%             t0,T ... Start- und End-Zeit
%             y0   ... Anfangswert
%             h0   ... Anfangs-Schrittweite
%             atol ... Absolute Toleranz
%             rtol ... Relative Toleranz
%
% Returns: t ... Zeiten
%          y ... approx. Loesung zu Zeiten t

% Parameter
  p = 4;          % KO von Verfahren
  hmin = 10*eps;  % kleinste zugelassene Schrittweite
  fac = 0.9;      % Sicherheits-Faktor
  facmin = 0.5;   % kleinste zugelassene Schrittweiten-Verkleinerung
  facmax = 1.5;   % groesste zugelassene Schrittweiten-Vergroesserung

% Initialisiere Zeit- und Loesungs-Vektor
  t = t0;
  y = y0;

% Mache Zeitschritte solange Endzeit nicht erreicht
  j   = 0;    % Initialisiere Schritt-Zaehler
  h   = h0;   % Initialisiere Schrittweite
  epsilon = atol + norm(y0)*rtol; % Initialisiere Fehlerschaetzer
  while (t(end) < T)

    % Zwischenspeicherung der Daten zum j-ten Schritt
    tj = t(end);    % t_j
    yj = y(:,end);  % y_j

    % Setze Schrittweite h
    tol = atol + norm(yj)*rtol;
    h = h*min(           ,max(            ,        *(                          )^(1./(p + 1.))));







    % Verfahren der Ordnung p
    yjp = Verfahren(tj,yj,h);              % y_{j+1}
    % Kontroll-Verfahren der Ordnung p + 1
    yhutjp = KontrollVerfahren(tj,yj,h); % ŷ_{j+1}

    % Fehlerschaetzer
    epsilon = norm(yhutjp - yjp);

    % Kontrolliere Toleranz-Kriterium
    if (                  )
      j = j + 1;
      t =
      y =
    end

  end
```

3. *Stabilitätfunktion und Steifigkeit* **[10 Punkt(e)]**

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\ddot{y} + \dot{y} - \varepsilon y = \sin(t) \tag{1}$$

mit Anfangswerten $y(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = 1$ auf dem Zeitintervall $t \in [0, 1]$. Hiebei ist ε ein positiver Parameter.

Die Lösung des AWP (1) soll näherungsweise mit folgendem Einschrittverfahren (ESV) berechnet werden

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \tag{2}$$

a) **[1 Punkt(e)]** Schreiben Sie (1) in ein AWP erster Ordnung.

b) **[3 Punkt(e)]** Ist dieses Problem steif für beliebig kleine $\varepsilon > 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) **[3 Punkt(e)]** Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des ESV (2).

d) **[1 Punkt(e)]** Ist das ESV (2) A-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) **[2 Punkt(e)]** Ist das ESV (2) geeignet um das AWP (1) für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ zu lösen? Falls es nicht geeignet ist, geben Sie ein besser geeignetes ESV an.

4. *Konsistenzordnung und Implementierung* **[10 Punkt(e)]**

Wir betrachten das folgende Runge-Kutta Einschrittverfahren (ESV)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j), \\ k_2 &= f(t_j + \frac{3}{4}h, y_j + \frac{3}{4}hk_1), \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{3}(k_1 + 2k_2). \end{aligned} \tag{3}$$

a) **[1 Punkt(e)]** Geben Sie das Butcher-Tableau des ESV (3) an.

b) **[4 Punkt(e)]** Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des ESV (3).

Hinweis: Ein zweistufiges explizites ESV hat höchstens Konsistenzordnung $p = 2$.

c) **[2 Punkt(e)]** Nun soll das folgende Anfangswertproblem mit dem ESV (3) näherungsweise gelöst werden

$$\dot{\mathbf{y}} = A\,\mathbf{y}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

für den Anfangswert

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und das Zeitintervall $t \in [0, 1]$. Welche Konvergenzordnung erwarten Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

Falls Sie **b)** nicht gelöst haben, nehmen Sie einfach den Parameter s für die Konsistenzordnung.

d) [3 Punkt(e)] Implementieren Sie dieses Verfahren in folgendem `MATLAB` Template:

```
function [t,y] = ESV(f,t0,T,y0,N)

% Zweck: integriere eine gewoehnliche Diff.-Gleichung erster
%        Ordnung mit gegebenem Einschrittverfahren
%
% Parameters:
% f      ... Rechte Seite f(t,y(t)) der gew. Diff.-Gl.
% t0, T  ... Start- und End-Zeit
% y0     ... Anfangswert
% N      ... Anzahl Schritte
%
% Returns:
% t      ... Zeiten
% y      ... approx. Loesung zu Zeiten t

% Berechne Zeitschritt
h = (T - t0)/N;

% Speicher fuer Zeit & approx. Loesung
t = zeros(1,N+1);
y =

% Setze Anfangswert fuer t
t(1) = t0;

% Setze Anfangswert fuer y



% Integriere
for j=1:N
    t(j+1) = t0 + j*h;
    k1 =
    k2 =

    % Berechne y_{j+1}



end

end
```

Verwenden Sie die folgende Box um zusätzliche Funktionen zu implementieren. Sie können davon ausgehen, dass der Inhalt dieser Box in der selben Datei wie obige Box steht.

Bitte wenden!

Siehe nächstes Blatt!

5. *Implizite Trapez-Methode* **[5 Punkt(e)]**

Wir betrachten die logistische Differentialgleichung

$$\dot{y} = y(1-y)$$

mit Anfangswert $y(0) = 1/2$ welche im Zeitintervall $t \in [0,1]$ mit der impliziten Trapez-Methode

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})\right)$$

gelöst werden soll.

a) **[1 Punkt(e)]** Stellen Sie die Gleichung auf welche in jedem Zeitschritt gelöst werden muss.

b) **[3 Punkt(e)]** Schlagen Sie eine zweckmässige Methode vor um Ihre Gleichung aus **a)** näherungsweise zu lösen.

Geben Sie alle nötigen Komponenten der von Ihnen gewählten Methode an.

c) **[1 Punkt(e)]** Was für eine Konvergenzordnung hat Ihr in **b)** gewähltes Verfahren? Sie können annehmen, dass Ihr gewähltes Verfahren konvergiert und Sie nahe genug an einer Lösung sind.