Dr. R. Käppeli D-ITET, D-MATL Sommer 2022

Prüfung Numerische Methoden

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Numerische Methoden	
Datum	23.08.2022	

1	2	3	4	Punkte
15	15	10	10	50

Wichtige Hinweise

- Die Prüfung dauert 90 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: 5 A4-Blätter doppelseitig (=10 Seiten) eigenhändig und handschriftlich verfasste Zusammenfassung. Sonst keine Hilfsmittel zugelassen.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch. Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift. Verwenden Sie einen Stift mit blauer oder schwarzer Farbe (keinesfalls rot oder grün).
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Unbegründete Lösungen (ausser bei Multiple-Choice-Aufgaben falls nicht explizit gefordert) werden nicht akzeptiert!
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

Siehe nächstes Blatt!

1. *Wahr oder Falsch* [**15 Punkt(e)**]

Jede folgende Aussage ist entweder wahr oder falsch. Jede richtige Antwort ergibt **1.5 Punkte** und falsche Antworten geben **keine** Abzüge.

Die Beantwortung soll auf dem **separaten Antwortsblatt** erfolgen. Machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

Beachten Sie bitte unten stehenden Richtlinien | Observe the following guidelines		
Antwort auswählen | Select answer	Antwort NICHT auswählen | Do NOT select answer	Antwort korrigieren | Correct answer
Was man **NICHT** tun sollte | What should **NOT** be done		

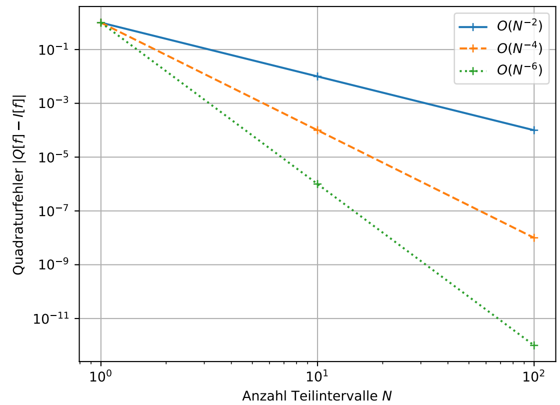
1) Sei $\mathbb{P}_n$ der Vektorraum aller Polynome von Grad kleiner gleich n auf dem Intervall $[a, b]$. Dann integriert eine $(n+1)$-Punkte Gauss-Legendre Quadraturregel folgenden Ausdruck
$$\|p\|^2 = \int_a^b p(x)^2 dx$$
für alle $p \in \mathbb{P}_n$ exakt.

2) Adaptive Quadraturen garantieren, dass der Quadraturfehler kleiner als eine gewünschte Toleranz tol ist.

3) Das Runge-Kutta Verfahren mit Butcher-Tableau
$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$
ist für das Anfangswertproblem
$$\dot{y}(t) = f(t),\ y(0) = 1,\ t \in [0, 5],$$
äquivalent zur Trapez-Regel.

4) Die Beschriftung der Linien (oben rechts) im folgenden Graphen entspricht den richtigen Ordnungen.

Bitte wenden!



5) Das folgende Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0,\ t \in [0, 1],$$

ist autonom.

6) Das folgende Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = \sin(t),\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1,\ t \in [0, 1],$$

genügt den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf.

7) Implizite Einschrittverfahren sind für alle Anfangswertprobleme effizienter als explizite Einschrittverfahren.

8) Für ein beliebiges Anfangswertproblem ist bei expliziten Einschrittverfahren die Schrittweite h nur durch die gewünschte Genauigkeit limitiert.

9) Viele explizite Runge-Kutta Einschrittverfahren sind L-stabil.

10) Das folgende Anfangswertproblem

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in [0, 1],$$

hat einen Steifigkeitsparameter von $S = 10$.

Siehe nächstes Blatt!

2. *Fragen aus den Übungen* **[15 Punkt(e)]**

a) **[4 Punkt(e)]** *(Serie 6, Aufgabe 2)*

Geben Sie für das folgende Runge-Kutta Einschrittverfahren an ob es (i) explizit oder implizit ist, (ii) das zugehörige Butcher-Tableau und (iii) skizzieren Sie das Verfahren im Richtungsfeld:

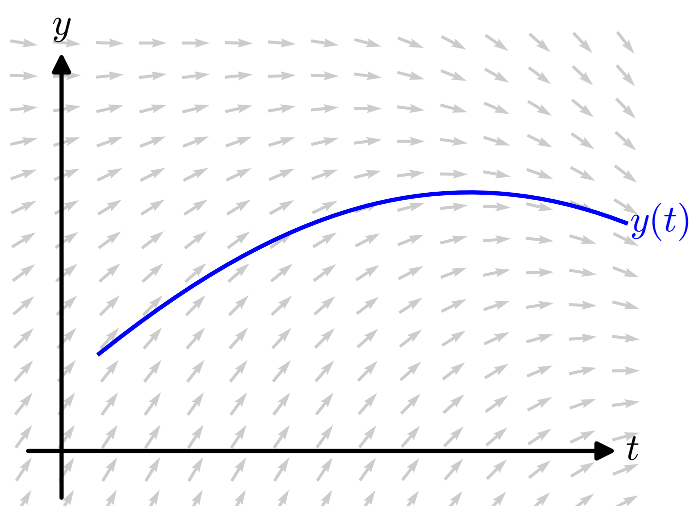
$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_j, y_j\right), \\ k_2 &= f\left(t_j + h, y_j + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\right), \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right). \end{aligned}$$

Schreiben Sie Ihre Antworten direkt hier:

(i)

(ii)

(iii) Richtungsfeld:



Bitte wenden!

b) [4 Punkt(e)] *(Serie 2, Aufgabe 4)*

Sei f eine glatte reelle Funktion.

(i) Berechnen Sie Approximationen der zweiten Ableitung mit polynomialer Interpolation und drei Stützstellen $x_0 = x - h$, $x_1 = x$, $x_2 = x + h$.

(ii) Bestimmen Sie den Fehler Ihrer Approximation aus (i) mittels Taylor-Entwicklung.

c) [2 Punkt(e)] *(Serie 5, Aufgabe 4)*

Autonomisieren Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -e^{-t/2}y(t) + \sin(t), \\ y(0) &= 10. \end{aligned}$$

d) **[5 Punkt(e)]** *(Serie 4, Aufgabe 1)*

Implementieren Sie im folgenden Template die zusammengesetzte Trapezregel in zwei Dimensionen zur Approximation des Integrals:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

```
function Q = trapez2D(f, a, b, Nx, c, d, Ny)

% Zweck: Berechne Approx. des 2D Integrals von f(x,y) ueber dem Gebiet
%        [a,b] x [c,d] mit (zusammengesetzter) Trapezregel.
%
% Parameters: f   ... zu integrierende Funktion
%             a,b ... linke/rechte Integrations-Grenzen in x-Richtung
%             Nx  ... Anzahl Teil-Intervalle in x-Richtung
%             c,d ... linke/rechte Integrations-Grenzen in y-Richtung
%             Ny  ... Anzahl Teil-Intervalle in y-Richtung
%
% Returns: Q ... Integral Approximation
```

3. *Anfangswertproblem und Stabilität* **[10 Punkt(e)]**

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

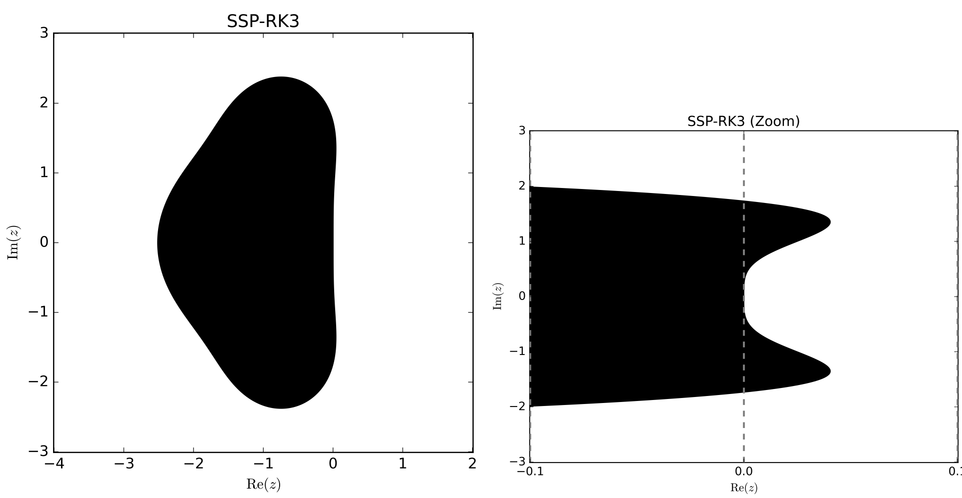
$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) &= 0, \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\omega = 1$ und $t \in [0, 10]$ ist.

Das AWP soll mit einem Runge-Kutta Einschrittverfahren (RK-ESV) näherungsweise gelöst werden:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{array} \tag{2}$$

In der Literatur ist dieses ESV auch bekannt als SSP-RK3 und dessen Stabilitätsgebiet wird in folgender Abb. gezeigt.



a) **[3 Punkt(e)]** Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des ESV (2).

b) **[2 Punkt(e)]** Schreiben Sie das AWP (1) um in ein lineares AWP erster Ordnung und bestimmen Sie dessen Eigenwerte.

c) **[3 Punkt(e)]** Das AWP (1) soll nun mit dem ESV (2) und dessen grösstmöglichen Zeitschritt stabil gelöst werden. Stellen Sie die zu lösende Gleichung auf um diesen Zeitschritt zu bestimmen.

Hinweis: Aus Symmetrie-Gründen reicht es aus die Gleichung nur für einen der Eigenwerte aufzustellen.

d) **[2 Punkt(e)]** Schlagen Sie eine Methode vor um Ihre Gleichung aus **c)** näherungsweise zu lösen und geben Sie alle notwendigen Komponenten explizit an.

Siehe nächstes Blatt!

4. *Konsistenz- und Konvergenzordnung* **[10 Punkt(e)]**

Wir betrachten das folgende zwei-stufige Runge-Kutta Einschrittverfahren (ESV)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha & \alpha & \\ \hline & \beta & 1-\beta \end{array} \tag{3}$$

wobei α und β Parameter sind.

a) **[1 Punkt(e)]** Geben Sie die Stufenform des ESV (3) an.

b) **[4 Punkt(e)]** Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des ESV (3) als Funktion der beiden Parametern α und β.

Hinweis: Das ESV Verfahren ist autonomierungsinvariant und ein zwei-stufiges explizites ESV hat höchstens Konsistenzordnung $p = 2$.

c) **[4 Punkt(e)]** Bestimmen Sie die beiden Parameter α und β so, dass der lokale Diskretisierungsfehler des ESV (3) minimal ist.

Hinweis: Betrachten Sie hierzu den Term proportional zu h^2 in der Konsistenzfehler-Untersuchung aus **b)**.

d) **[1 Punkt(e)]** Welche Konvergenzordnung erwarten Sie, wenn Sie Ihr ESV mit den in **c)** bestimmten Parametern auf folgendes Anfangswertproblem anwenden

$$\dot{y} = y + e^t,\ y(0) = 1$$

und $t \in [0, 1]$. Begründen Sie Ihre Erwartung.

Falls Sie **b)** oder **c)** nicht gelöst haben, bezeichnen Sie die Konsistenzordnung einfach mit s.