D-MATH Grundstrukturen FS 2023
Prof. Richard Pink

Probeklausur 120 min

Single Choice Aufgaben (30 Punkte) Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Aufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Aufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe sollen Sie die Antworten nicht begründen.

1. Wenn genau eine der folgenden Aussagen richtig ist, welche ist es?
   (a) Alle vier Aussagen sind falsch.
   (b) Genau zwei der übrigen Aussagen sind falsch.
   (c) Höchstens zwei der übrigen Aussagen sind falsch.
   (d) Alle übrigen Aussagen sind falsch.

2. Welcher Ausdruck bildet eine wohlgeformte Formel? Dabei bezeichnet F ein zweistelliges Funktionssymbol und R ein dreistelliges Relationssymbol.
   (a) $\forall x \longrightarrow \exists y\colon (x = y)$.
   (b) $\exists x\, \forall y\colon (y = x \longrightarrow R(x, y, z))$.
   (c) $x = x\ \forall x$.
   (d) $\forall x\, \exists y\colon (F(x, y) \longrightarrow (x = y))$.

3. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch* für ein Modell M, eine Menge von Formeln T, und einen Satz σ?
   (a) Gilt $M \vDash T$ und $T \nvdash \sigma$, so folgt $M \nvDash \sigma$.
   (b) Gilt $M \vDash T$, so ist T konsistent.
   (c) Gilt $T \nvdash \sigma$, so ist T konsistent.
   (d) Es existiert ein Satz τ mit $M \nvDash \tau$.

4. Welche der folgenden Mengen gibt es in der Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel? Mit „enthalten" ist dabei immer „enthalten als Element" gemeint.
   (a) Eine Menge, die sich selbst enthält.
   (b) Eine Menge, die alle Mengen enthält, welche sich selbst enthalten.
   (c) Eine Menge $M \neq \varnothing$, so dass für jedes $x \in M$ ein $y \in x$ existiert mit $y \in M$.
   (d) Eine Menge, die alle Mengen enthält.

5. Welche Aussage ist unter Zermelo-Fraenkel *nicht* äquivalent zum Auswahlaxiom?

   (a) Für jede Menge X existiert eine Wohlordnung auf $X \times X$.

   (b) Für jede Menge X existiert eine Wohlordnung auf $\mathcal{P}(X)$.

   (c) Für je zwei Mengen X, Y und jede surjektive Funktion $p\colon X \to Y$ existiert eine injektive Funktion $i\colon Y \to X$ mit $p \circ i = \mathrm{id}_Y$.

   (d) Für je zwei Mengen X, Y und jede injektive Funktion $i\colon Y \to X$ existiert eine surjektive Funktion $p\colon X \to Y$ mit $p \circ i = \mathrm{id}_Y$.

6. Welche Eigenschaft kann eine Partialordnung *nicht* haben?

   (a) $\forall x\, \forall y\colon (x < y \longrightarrow \exists z\colon x < z \wedge z < y)$.

   (b) $\exists z\, \forall x\, \forall y\colon (x < y \longrightarrow x < z \wedge z < y)$.

   (c) $\exists z\, \forall x\, \forall y\colon (x \leqslant y \longrightarrow z < x)$.

   (d) $\exists x\, \exists y\colon \forall x'\, \forall y'\colon (x < x' \wedge y < y' \longrightarrow x' \nleqslant y' \wedge y' \nleqslant x')$.

7. Welche Ungleichung gilt für alle Kardinalzahlen α, β, γ mit $\alpha < \beta$?

   (a) $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$

   (b) $\gamma^\alpha < \gamma^\beta$

   (c) $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$

   (d) Alle übrigen Aussagen sind im Allgemeinen falsch.

8. Ein angeordneter Körper $(K, \leqslant)$ heisst *archimedisch*, wenn für jedes $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x < n$. Welche Aussage ist *falsch*?

   (a) Jeder vollständige angeordnete Körper ist archimedisch.

   (b) Jeder archimedische angeordnete Körper ist isomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{R}$.

   (c) Jeder Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist vollständig bezüglich der induzierten Ordnung.

   (d) Jeder angeordnete Körper enthält einen zu $\mathbb{Q}$ isomorphen Unterkörper.

9. Welche der folgenden Restklassen ist eine Einheit in $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$?

   (a) $[-12]$

   (b) $[2]$

   (c) $[3]$

   (d) $[5]$

10. Welche der folgenden Rechnungen ist korrekt?

    (a) $3^{20} \equiv 2 \mod (11)$
    (b) $5^{20} \equiv 1 \mod (11)$
    (c) $6^{20} \equiv 1 \mod (3)$
    (d) $370^{20} \equiv 2 \mod (3)$

11. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch* für eine Primzahl p?

    (a) Für alle $x, y \in \mathbb{F}_p$ gilt $(x+y)^p = x + y$.
    (b) Für alle $x, y \in \mathbb{F}_p$ gilt $(x+y)^p = x^p + y^p$
    (c) Für jedes $x \in \mathbb{F}_p$ existiert ein $z \in \mathbb{F}_p$ mit $z^p = x$.
    (d) Für jedes $x \in \mathbb{F}_p$ existiert ein $z \in \mathbb{F}_p$ mit $z^2 = x$.

12. Welche Aussage gilt für jede Menge X von 25 ganzen Zahlen im Intervall $[1, 50]$?

    (a) Es existieren zwei Elemente von X, von denen eines das andere teilt.
    (b) Es existieren zwei Elemente von X, die zueinander teilerfremd sind.
    (c) Es existiert eine Primzahl in X.
    (d) Keine der übrigen Aussagen gilt für alle X.

13. Welche der folgenden Potenzreihen ist in $\mathbb{Z}[[X]]$ *nicht* invertierbar?

    (a) $\sum_{i \geqslant 0} (2X)^i$
    (b) $\sum_{i \geqslant 0} X^{i!}$
    (c) $1 - X$
    (d) $\sum_{i \geqslant 0} \prod_{k \geqslant i} (-X)^i$

14. Welche Aussage gilt für jede Folge $(a_0, a_1, \ldots)$ in $\mathbb{R}$?

    (a) Die erzeugende Funktion der Folge ist genau dann ein Polynom, wenn die Folge schliesslich konstant wird.
    (b) Ist die erzeugende Funktion der Folge ein Polynom, so konvergiert die Folge.
    (c) Konvergiert die Folge, so induziert ihre erzeugende Funktion eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
    (d) Konvergiert die Folge, so ist ihre erzeugende Funktion ein Polynom.

15. Wieviele natürliche Zahlen n gibt es mit $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = 4$?

    (a) 0
    (b) 2
    (c) 3
    (d) 4

Textaufgaben: Begründen Sie alle Rechnungen und achten Sie auf eine vollständige und verständliche Argumentation, da dies mitbewertet wird.

16. (a) *(2 Punkte)* Gib die Definition einer Wohlordnung an.

    (b) *(9 Punkte)* Zeige: Eine totalgeordnete Menge $(X, \leqslant)$ ist genau dann wohlgeordnet, wenn für jedes $x \in X$ die Teilmenge $X_{\leqslant x} := \{y \in X \mid y \leqslant x\}$ wohlgeordnet ist.

17. *(8 Punkte)* Die Ordnungsrelation auf den natürlichen Zahlen ist definert durch

$$x \leqslant y \;:\equiv\; (\exists u\colon u + x = y).$$

Beweise alleine mittels der Peano-Axiome (und eventuell der Kommutativität und Assoziativität der Addition) die Aussage

$$\forall x\, \forall y\colon x \leqslant y \wedge y \leqslant x \longrightarrow x = y.$$

18. *(10 Punkte)* Sei X eine unendliche Menge und $\Pi(X)$ die Menge aller Partialordnungen auf X. Zeige $|\Pi(X)| = 2^{|X|}$.

19. *(8 Punkte)* Bestimme für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Tupel $(s_1, \ldots, s_k)$ ganzer Zahlen mit $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_k \leqslant k + 2\ell$ und $s_i \equiv i \mod (2)$ für alle i.