D-MATH | Grundstrukturen | FS 2023

Prof. Richard Pink

Musterlösung

Probeklausur 120 min

Single Choice Aufgaben (30 Punkte) Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Aufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Aufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe sollen Sie die Antworten nicht begründen.

1. Wenn genau eine der folgenden Aussagen richtig ist, welche ist es?

   (a) Alle vier Aussagen sind falsch.

   (b) Genau zwei der übrigen Aussagen sind falsch.

   (c) Höchstens zwei der übrigen Aussagen sind falsch.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Alle übrigen Aussagen sind falsch.

   Erklärung: Aussage (a) widerspricht direkt der gegebenen Voraussetzung und ist daher falsch. Wäre (b) oder (c) richtig, so wäre auch eine der übrigen Aussagen richtig, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht; also sind auch (b) und (c) falsch. Somit sind alle Aussagen ausser (d) falsch, was genau in (d) ausgedrückt ist; daher ist (d) die richtige Antwort.

2. Welcher Ausdruck bildet eine wohlgeformte Formel? Dabei bezeichnet F ein zweistelliges Funktionssymbol und R ein dreistelliges Relationssymbol.

   (a) $\forall x \longrightarrow \exists y\colon (x = y)$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\exists x\, \forall y\colon (y = x \longrightarrow R(x, y, z))$.

   (c) $x = x\ \forall x$.

   (d) $\forall x\, \exists y\colon (F(x, y) \longrightarrow (x = y))$.

   Erklärung: (a) ist keine wohlgeformte Formel, weil direkt nach $\forall x$ eine Formel stehen müsste. (c) ist nicht wohlgeformt, weil der Quantor immer *vor* seinem Geltungsbereich stehen muss. (d) ist nicht wohlgeformt, weil F ein Funktionssymbol ist und $F(x, y)$ deshalb ein Term, aber keine Formel ist. Dafür ist (b) wohlgeformt, auch wenn die freie Variable z nur in der Folgerung auftaucht.

3. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch* für ein Modell M, eine Menge von Formeln T, und einen Satz σ?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Gilt $M \models T$ und $T \nvdash \sigma$, so folgt $M \not\models \sigma$.

   (b) Gilt $M \models T$, so ist T konsistent.

   (c) Gilt $T \nvdash \sigma$, so ist T konsistent.

   (d) Es existiert ein Satz τ mit $M \not\models \tau$.

   Erklärung: Die Theorie eines Modells ist immer konsistent; daher gilt (b). Sodann ist jeder Satz σ wahr oder falsch in M, also entsprechend $M \not\models \neg\sigma$ oder $M \not\models \sigma$; somit gilt (d). Weiter impliziert eine inkonsistente Theorie alles, also insbesondere σ. Im Umkehrschluss ist damit auch (c) richtig.

   Dagegen ist (a) falsch: Denn $T \nvdash \sigma$ bedeutet nur, dass σ nicht aus T beweisbar ist, aber nicht, dass $\neg\sigma$ aus T beweisbar ist. Sind beide nicht beweisbar, so ist $T \cup \{\neg\sigma\}$ konsistent, also existiert ein Modell M mit $M \models T$ und $M \models \sigma$.

4. Welche der folgenden Mengen gibt es in der Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel? Mit „enthalten“ ist dabei immer „enthalten als Element“ gemeint.

   (a) Eine Menge, die sich selbst enthält.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Eine Menge, die alle Mengen enthält, welche sich selbst enthalten.

   (c) Eine Menge $M \neq \varnothing$, so dass für jedes $x \in M$ ein $y \in x$ existiert mit $y \in M$.

   (d) Eine Menge, die alle Mengen enthält.

   Erklärung: Eine Menge wie in (a) oder (c) widerspricht dem Fundierungsaxiom. Da eine Menge aller Mengen auch sich selbst enthalten würde, ist somit (d) auch falsch. Da es keine Menge wie in (a) gibt, erfüllt schliesslich jede Menge die Bedingung in (b), zum Beispiel die leere Menge. Somit ist (b) die richtige Antwort.

5. Welche Aussage ist unter Zermelo-Fraenkel *nicht* äquivalent zum Auswahlaxiom?

   (a) Für jede Menge X existiert eine Wohlordnung auf $X \times X$.

   (b) Für jede Menge X existiert eine Wohlordnung auf $\mathcal{P}(X)$.

   (c) Für je zwei Mengen X, Y und jede surjektive Funktion $p\colon X \to Y$ existiert eine injektive Funktion $i\colon Y \to X$ mit $p \circ i = \mathrm{id}_Y$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Für je zwei Mengen X, Y und jede injektive Funktion $i\colon Y \to X$ existiert eine surjektive Funktion $p\colon X \to Y$ mit $p \circ i = \mathrm{id}_Y$.

   Erklärung: Das Auswahlaxiom ist äquivalent zum Wohlordungsprinzip und impliziert daher (a) und (b). Umgekehrt induziert jede Wohlordnung auf $X \times X$

durch Zurückziehung unter der Injektion $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ eine auf X. Sodann induziert jede Wohlordnung auf $\mathcal{P}(X)$ durch Zurückziehung unter der Injektion $X \to \mathcal{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$ eine auf X. Somit sind (a) und (b) äquivalent zum Auswahlaxiom. Die Äquivalenz für (c) wurde in Serie 6 bewiesen.

Dagegen ist (d) falsch im Fall $X \neq Y = \varnothing$ und deshalb nicht äquivalent zum Auswahlaxiom. (Auch im Fall $Y \neq \varnothing$ benötigt man zur Konstruktion von p nur ein Element $y_0 \in Y$ und kann $p(x) := y$ für $x = i(y)$ und $p(x) := y_0$ sonst setzen.)

6. Welche Eigenschaft kann eine Partialordnung *nicht* haben?

   (a) $\forall x\, \forall y\colon (x < y \longrightarrow \exists z\colon x < z \wedge z < y)$.

   (b) $\exists z\, \forall x\, \forall y\colon (x < y \longrightarrow x < z \wedge z < y)$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\exists z\, \forall x\, \forall y\colon (x \leqslant y \longrightarrow z < x)$.

   (d) $\exists x\, \exists y\colon \forall x'\, \forall y'\colon (x < x' \wedge y < y' \longrightarrow x' \nleqslant y' \wedge y' \nleqslant x')$.

   Erklärung: Jedes Element z mit der Eigenschaft in (c) erfüllt für $x = y = z$ auch die Bedingung $z \leqslant z$ und folglich $z < z$, was einen Widerspruch liefert. Somit ist (c) nicht möglich. Dagegen gilt (a) für $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnung. Sodann betrachte eine nichtleere Menge mit der Partialordnung $x \leqslant y :\Leftrightarrow x = y$. Für diese existieren gar keine Elemente mit $x < y$ oder $x < x'$, also sind (b) und (d) erfüllt. Darum ist nur (c) die richtige Antwort.

7. Welche Ungleichung gilt für alle Kardinalzahlen α, β, γ mit $\alpha < \beta$?

   (a) $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$

   (b) $\gamma^\alpha < \gamma^\beta$

   (c) $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$

   $\boxed{\text{(d)}}$ Alle übrigen Aussagen sind im Allgemeinen falsch.

   Erklärung: Für $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, \omega)$ gilt überall Gleichheit.

8. Ein angeordneter Körper $(K, \leqslant)$ heisst *archimedisch*, wenn für jedes $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x < n$. Welche Aussage ist *falsch*?

   (a) Jeder vollständige angeordnete Körper ist archimedisch.

   (b) Jeder archimedische angeordnete Körper ist isomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Jeder Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist vollständig bezüglich der induzierten Ordnung.

   (d) Jeder angeordnete Körper enthält einen zu $\mathbb{Q}$ isomorphen Unterkörper.

   Erklärung: Aussagen (a) und (d) wurden in der Vorlesung bewiesen, und Aussage (b) in der Übungsserie 10. Dagegen ist (c) falsch für den Unterkörper $\mathbb{Q}$.

9. Welche der folgenden Restklassen ist eine Einheit in $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$?

   (a) $[-12]$
   (b) $[2]$
   (c) $[3]$
   $\boxed{\text{(d)}}$ $[5]$

   Erklärung: Von den angegebenen Repräsentanten ist nur 5 teilerfremd zu 36; darum ist nur (d) korrekt.

10. Welche der folgenden Rechnungen ist korrekt?

   (a) $3^{20} \equiv 2 \mod (11)$
   $\boxed{\text{(b)}}$ $5^{20} \equiv 1 \mod (11)$
   (c) $6^{20} \equiv 1 \mod (3)$
   (d) $370^{20} \equiv 2 \mod (3)$

   Erklärung: Wegen $6 \equiv 0 \bmod (3)$ ist auch $6^{20} \equiv 0 \bmod (3)$ und somit (c) falsch. Sodann ist $370 \equiv 1 \bmod (3)$ und daher $370^{20} \equiv 1 \bmod (3)$; also ist auch (d) falsch. Weiter gilt nach dem kleinen Satz von Fermat $a^{10} \cdot a = a^{11} \equiv a \equiv 1 \cdot a \bmod (11)$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$. Ist zusätzlich $11 \nmid a$, so ist a invertierbar modulo (11) und daher $a^{10} \equiv 1 \bmod (11)$. Für $a = 9$ folgt daraus $3^{20} = 9^{10} \equiv 1 \bmod (11)$; also ist (a) falsch. Für $a = 25$ folgt schliesslich $5^{20} = 25^{10} \equiv 1 \bmod (11)$; also ist (b) richtig.

11. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch* für eine Primzahl p?

   (a) Für alle $x, y \in \mathbb{F}_p$ gilt $(x+y)^p = x + y$.
   (b) Für alle $x, y \in \mathbb{F}_p$ gilt $(x+y)^p = x^p + y^p$
   (c) Für jedes $x \in \mathbb{F}_p$ existiert ein $z \in \mathbb{F}_p$ mit $z^p = x$.
   $\boxed{\text{(d)}}$ Für jedes $x \in \mathbb{F}_p$ existiert ein $z \in \mathbb{F}_p$ mit $z^2 = x$.

   Erklärung: Für alle $x \in \mathbb{F}_p$ ist $x^p = x$. Daher gelten (a) und (b), sowie (c) mit $z = x$. Dagegen ist die Restklasse $\bar{2}$ kein Quadrat in $\mathbb{F}_3$; darum ist (d) falsch.

12. Welche Aussage gilt für jede Menge X von 25 ganzen Zahlen im Intervall $[1, 50]$?

   (a) Es existieren zwei Elemente von X, von denen eines das andere teilt.
   (b) Es existieren zwei Elemente von X, die zueinander teilerfremd sind.
   (c) Es existiert eine Primzahl in X.
   $\boxed{\text{(d)}}$ Keine der übrigen Aussagen gilt für alle X.

   Erklärung: Aussage (a) ist falsch für die Menge $\{26, 27, \ldots, 50\}$, und (b) ist falsch für die Teilmenge $\{2, 4, \ldots, 50\}$ aller geraden Zahlen. Ersetzt man in der letzteren

Teilmenge die 2 durch die 9, so erhält man auch ein Gegenbeispiel zu (c). Also ist (d) die richtige Antwort.

13. Welche der folgenden Potenzreihen ist in $\mathbb{Z}[[X]]$ *nicht* invertierbar?

    (a) $\sum_{i\geqslant 0}(2X)^i$

    $\boxed{\text{(b)}}$ $\sum_{i\geqslant 0} X^{i!}$

    (c) $1 - X$

    (d) $\sum_{i\geqslant 0}\prod_{k\geqslant i}(-X)^i$

    Erklärung: Die Reihen in (a), (c) und (d) haben konstanten Koeffizienten $1 \in \mathbb{Z}^\times$ und sind daher invertierbar in $\mathbb{Z}[[X]]$. Hingegen hat die Reihe in (b) den konstanten Koeffizienten 0 und ist somit nicht invertierbar.

14. Welche Aussage gilt für jede Folge $(a_0, a_1, \ldots)$ in $\mathbb{R}$?

    (a) Die erzeugende Funktion der Folge ist genau dann ein Polynom, wenn die Folge schliesslich konstant wird.

    $\boxed{\text{(b)}}$ Ist die erzeugende Funktion der Folge ein Polynom, so konvergiert die Folge.

    (c) Konvergiert die Folge, so induziert ihre erzeugende Funktion eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

    (d) Konvergiert die Folge, so ist ihre erzeugende Funktion ein Polynom.

    Erklärung: Die erzeugende Funktion ist die formale Potenzreihe $F(X) := \sum_{i\geqslant 0} a_i X^i$. Ist diese ein Polynom, so ist $a_i = 0$ für alle $i \gg 0$, also konvergiert die Folge gegen 0 und (b) ist richtig. Im Fall der konstanten Folge $(1, 1, \ldots)$ ist dagegen $F(X) = \sum_{i\geqslant 0} X^i$ kein Polynom; also ist (a) falsch. Da die konstante Folge ausserdem konvergiert, ist auch (d) falsch. Schliesslich konvergiert die Potenzreihe $\sum_{i\geqslant 0} X^i$ nicht überall auf $\mathbb{R}$; somit ist auch (c) falsch.

15. Wieviele natürliche Zahlen n gibt es mit $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = 4$?

    (a) 0

    (b) 2

    (c) 3

    $\boxed{\text{(d)}}$ 4

    Erklärung: Ist $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\nu_i}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und ganzzahligen Exponenten $\nu_i > 0$, so ist $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = \prod_{i=1}^r p_i^{\nu_i - 1}(p_i - 1)$. Für $\varphi(n) = 4$ ist daher jedes $p_i \leqslant 5$ und $\nu_i = 1$ für jede Primzahl $p_i > 2$. Insgesamt bleiben daher genau die Möglichkeiten $n = 5,\ 2 \cdot 5,\ 4 \cdot 3,\ 8$. Somit ist (d) richtig.

Textaufgaben: Begründen Sie alle Rechnungen und achten Sie auf eine vollständige und verständliche Argumentation, da dies mitbewertet wird.

16. (a) *(2 Punkte)* Gib die Definition einer Wohlordnung an.

    (b) *(9 Punkte)* Zeige: Eine totalgeordnete Menge $(X, \leqslant)$ ist genau dann wohlgeordnet, wenn für jedes $x \in X$ die Teilmenge $X_{\leqslant x} := \{y \in X \mid y \leqslant x\}$ wohlgeordnet ist.

    Lösung:

    (a) Eine Wohlordnung auf einer Menge X ist eine Totalordnung, bezüglich der jede nicht-leere Teilmenge von X ein kleinstes Element besitzt.

    (b) Ist X wohlgeordnet, so ist jede nichtleere Teilmenge von $X_{\leqslant x}$ auch eine nichtleere Teilmenge von X und besitzt daher ein kleinstes Element. Also ist auch $X_{\leqslant x}$ wohlgeordnet. Dies zeigt die eine Implikation.

    Nun nehmen wir an, dass für jedes $x \in X$ die Teilmenge $X_{\leqslant x}$ wohlgeordnet ist. Sei Y eine nicht-leere Teilmenge von X, und wähle ein Element $x \in Y$. Dann ist $Y \cap X_{\leqslant x}$ eine Teilmenge von $X_{\leqslant x}$ mit dem Element x und ist daher nichtleer. Da $X_{\leqslant x}$ wohlgeordnet ist, besitzt $Y \cap X_{\leqslant x}$ also ein kleinstes Element y. Insbesondere gilt dann $x \geqslant y$. Für jedes $z \in Y$ gilt daher entweder $z \leqslant x$ und damit $z \in Y \cap X_{\leqslant x}$ und folglich $z \geqslant y$, oder es gilt $z > x \geqslant y$ und folglich $z > y$. Somit ist y ein kleinstes Element von Y. Daher ist X wohlgeordnet und es gilt die umgekehrte Implikation.

17. *(8 Punkte)* Die Ordnungsrelation auf den natürlichen Zahlen ist definert durch

$$x \leqslant y \;:\equiv\; (\exists u\colon u + x = y).$$

Beweise alleine mittels der Peano-Axiome (und eventuell der Kommutativität und Assoziativität der Addition) die Aussage

$$\forall x\, \forall y\colon x \leqslant y \wedge y \leqslant x \longrightarrow x = y.$$

Lösung: Betrachte die Aussage

$$\varphi(x, y) \;:=\; (x \leqslant y \wedge y \leqslant x \longrightarrow x = y).$$

Die Aussage $\varphi(0, 0)$ gilt tautologisch. Sodann betrachte ein $x \in \mathbb{N}$ mit $Sx \leqslant 0$ und $0 \leqslant Sx$. Dann existiert ein $u \in \mathbb{N}$ mit $u + Sx = 0$. Nach der Definition der Addition ist dann $S(u + x) = u + Sx = 0$. Da 0 nicht im Bild von S liegt, ist dies ein Widerspruch; also gilt $\varphi(Sx, 0)$. Genauso zeigt man $\varphi(0, Sy)$. Betrachte schliesslich $x, y \in \mathbb{N}$ mit $Sx \leqslant Sy$ und $Sy \leqslant Sx$. Dann existieren $u, v \in \mathbb{N}$ mit $u + Sx = Sy$ und $v + Sy = Sx$. Nach der Definition der Addition gilt dann

$S(u+x) = u+Sx = Sy$ und $S(v+y) = v+Sy = Sx$. Aufgrund der Injektivität von S folgt daraus $u+x=y$ und $v+y=x$; es gilt also $x \leqslant y$ und $y \leqslant x$. Falls $\varphi(x,y)$ gilt, so folgt daher $x=y$ und damit $Sx=Sy$; also gilt $\varphi(Sx,Sy)$. Durch Induktion folgt die Aussage $\varphi(x,y)$ damit für alle $x,y \in \mathbb{N}$.

Aliter: Zuerst beweisen wir für alle $x \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$(*) \qquad \varphi(x) \; := \; \forall z\colon (z+x=x \longrightarrow z=0).$$

Am Induktionsanfang $x=0$ haben wir $z=z+0=0$; also gilt $\varphi(0)$. Für den Induktionsschritt nehmen wir $\varphi(x)$ an. Aus $z+Sx=Sx$ folgt dann $S(z+x) = z+Sx=Sx$. Wegen der Injektivität von S folgt daraus $z+x=x$, und mit $\varphi(x)$ folgt weiter $z=0$. Somit gilt $\varphi(Sx)$. Nach Induktion gilt also $\varphi(x)$ für alle x.

Weiter beweisen wir für alle $u \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$(**) \qquad \psi(u) \; := \; \forall v\colon (v+u=0 \longrightarrow u=0).$$

Hier gilt $\psi(0)$ tautologisch. Sodann betrachte $u,v \in \mathbb{N}$ mit $v+Su=0$. Nach der Definition der Addition ist dann $S(v+u) = v+Su=0$. Da 0 nicht im Bild von S liegt, ist dies ein Widerspruch; somit gilt auch $\psi(Su)$. Durch Induktion folgt die Aussage $\psi(u)$ damit für alle $u \in \mathbb{N}$.

Nun betrachte $x,y \in \mathbb{N}$ mit $x \leqslant y$ und $y \leqslant x$. Nach Definition existieren dann $u,v \in \mathbb{N}$ mit $u+x=y$ und $v+y=x$. Aus der Assoziativität der Addition folgt daraus

$$(v+u)+x = v+(u+x) = v+y = x.$$

Nach $(*)$ gilt also $v+u=0$, und mit $(**)$ folgt daraus $u=0$. Also gilt $x=0+x=u+x=y$ und wir sind fertig.

18. *(10 Punkte)* Sei X eine unendliche Menge und $\Pi(X)$ die Menge aller Partialordnungen auf X. Zeige $|\Pi(X)| = 2^{|X|}$.

Lösung: Jede Partialordnung auf X ist eine binäre Relation und damit eine Teilmenge von $X \times X$. Also ist $|\Pi(X)| \leqslant |\mathcal{P}(X\times X)| = 2^{|X\times X|}$. Da X unendlich ist, ist nun aber $|X\times X| = |X|$. Daraus folgt $|\Pi(X)| \leqslant 2^{|X|}$.

Für die Umkehrung assoziieren wir zu jeder Funktion $\sigma\colon x \mapsto \sigma_x$ von X in die symmetrische Gruppe S_2 die durch

$$(x,i) \leqslant (y,j) \; :\Longleftrightarrow \; (x=y) \wedge (\sigma_x(i) \leqslant \sigma_x(j))$$

definierte Partialordnung auf $X \times \{1,2\}$. Für jedes $x \in X$ gilt dann $(x,\sigma_x(1)) < (x,\sigma_x(2))$; also bestimmt diese Partialordnung die Funktion σ. Somit haben wir eine injektive Funktion von der Menge aller Funktionen $X \to S_2$ in die Menge aller Partialordnungen auf $X \times \{1,2\}$. Daher gilt also $2^{|X|} = |{}^X S_2| \leqslant |\Pi(X\times\{1,2\})|$. Da X nun aber unendlich ist, gilt $|X\times\{1,2\}| = |X|$ und daher $|\Pi(X\times\{1,2\})| = |\Pi(X)|$. Somit folgt $2^{|X|} \leqslant |\Pi(X)|$.

19. *(8 Punkte)* Bestimme für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Tupel $(s_1, \ldots, s_k)$ ganzer Zahlen mit $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_k \leqslant k + 2\ell$ und $s_i \equiv i \mod (2)$ für alle i.

Lösung: Sei $a(k, \ell)$ die fragliche Anzahl. Im Fall $k = 0$ erfüllt das leere Tupel die genannten Bedingungen, also gilt $a(0, \ell) = 1$. Im Fall $\ell = 0$ erfüllt nur das Tupel $(1, 2, \ldots, k)$ die Bedingungen, daher gilt weiter $a(k, 0) = 1$. Für $k, \ell > 0$ muss der letzte Wert s_k einerseits $\leqslant k + 2\ell$ und andererseits kongruent zu k modulo 2 sein. Also ist entweder $s_k = k + 2\ell$, in welchem Fall die Anzahl der Mögllichkeiten für $(s_1, \ldots, s_{k-1})$ gleich $a(k-1, \ell)$ ist; oder es ist $s_k \leqslant k + 2(\ell - 1)$, wofür es genau $a(k, \ell - 1)$ Möglichkeiten gibt. Somit gelten die Rekursionsgleichungen

$$a(k, \ell) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ 1 & \text{für } \ell = 0, \\ a(k-1, \ell) + a(k, \ell - 1) & \text{für } k, \ell > 0. \end{cases}$$

Für die zugehörige erzeugende Funktion gilt daher

$$\begin{aligned} F(X) &:= \sum_{k,\ell \geqslant 0} a(k, \ell) X^k Y^\ell \\ &= 1 + \sum_{k>0} X^k + \sum_{\ell>0} Y^\ell + \sum_{k,\ell>0} \big(a(k-1, \ell) + a(k, \ell-1)\big) X^k Y^\ell \\ &= 1 + \sum_{k' \geqslant 0} X^{k'+1} + \sum_{\ell' \geqslant 0} Y^{\ell'+1} + \sum_{k' \geqslant 0,\, \ell>0} a(k', \ell) X^{k'+1} Y^\ell + \sum_{k>0,\, \ell \geqslant 0} a(k, \ell') X^k Y^{\ell'+1} \\ &= 1 + \sum_{k',\ell \geqslant 0} a(k', \ell) X^{k'+1} Y^\ell + \sum_{k,\ell' \geqslant 0} a(k, \ell') X^k Y^{\ell'+1} \\ &= 1 + F(X) \cdot (X + Y). \end{aligned}$$

Auflösen nach $F(X)$ und die geometrische Reihe liefert also

$$\begin{aligned} F(X) = \frac{1}{1 - (X+Y)} &= \sum_{n \geqslant 0} (X+Y)^n \\ &= \sum_{n \geqslant k \geqslant 0} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k} \\ &= \sum_{k,\ell \geqslant 0} \binom{k+\ell}{k} X^k Y^\ell. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich also $a(k, \ell) = \binom{k+\ell}{k}$.

Aliter: Wegen $s_i \equiv i \mod (2)$ ist jedes $s_i = i + 2t_i$ für eine ganze Zahl t_i. Die übrigen Bedingungen lauten dann $1 \leqslant 1 + 2t_1 < \ldots < k + 2t_k \leqslant k + 2\ell$ und sind daher äquivalent zu $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant \ell$. Mit $r_i := i + t_i$ sind sie weiter äquivalent zu $0 < r_1 < \ldots < r_k \leqslant k + \ell$. Somit ist $a(k, \ell)$ die Anzahl aller Tupel ganzer Zahlen $(r_1, \ldots, r_k)$ mit $0 < r_1 < \ldots < r_k \leqslant k + \ell$. Für jedes solche Tupel ist $\{r_1, \ldots, r_k\}$ eine k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, k + \ell\}$, und umgekehrt entspricht jede solche Teilmenge einem eindeutigen k-Tupel aufsteigender Zahlen. Somit ist $a(k, \ell)$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, k + \ell\}$ und daher gleich $\binom{k+\ell}{k}$.