Serie 10

Angeordnete Körper, reelle Zahlen

Ein angeordneter Körper $(K, \leqslant)$ heisst *archimedisch*, wenn für jedes $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x < n$.

1. Zeige, dass ein angeordneter Körper genau dann archimedisch ist, wenn er isomorph ist zu einem Unterkörper von $\mathbb{R}$ mit der induzierten Ordnung.

2. Ein Ausdruck der Form $f(X) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n X^n$ in einem Variablensymbol X mit beliebigen $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \mathbb{R}$ heisst eine *formale Laurentreihe mit Koeffizienten in* $\mathbb{R}$. Dabei darf n_0 negativ sein, und die Konvergenz beim Einsetzen konkreter Werte für X ist irrelevant. Summe und Produkt zweier formaler Laurentreihen sind definiert analog wie bei Potenzreihen. Zusammen mit $0, 1 \in \mathbb{R}$ bildet die Menge $\mathbb{R}((X))$ aller Laurentreihen einen Körper. (Dies ist hier nicht zu beweisen.)

   Eine Laurentreihe erklären wir nun als positiv, wenn sie ungleich Null ist und ihr erster nichtverschwindende Koeffizient in $\mathbb{R}$ positiv ist. Weiter definieren wir $f < g$ genau dann, wenn $g - f$ positiv ist. Zeige, dass dies $\mathbb{R}((X))$ zu einem nicht-archimedischen angeordneten Körper macht.

*3. *Alternative Konstruktion der reellen Zahlen:* Wir nennen eine Funktion $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *quasi-linear*, wenn die Menge

$$\{f(n+m) - f(n) - f(m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

endlich ist. Wir nennen zwei Funktionen $f, g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *äquivalent*, wenn die Menge

$$\{f(n) - g(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

endlich ist. Zeige:

(a) Die Äquivalenz von quasi-linearen Funktionen ist eine Äquivalenzrelation. Sei $\mathbb{L}$ die Menge ihrer Äquivalenzklassen.

(b) Für jede reelle Zahl x ist die Funktion $f_x \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \lfloor nx \rfloor$ quasi-linear.

(c) Die dadurch induzierte Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$, $x \mapsto [f_x]$ ist bijektiv.

(d) Beschreibe die beiden Abbildungen $\mathbb{L} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, die der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ entsprechen.