Musterlösung Serie 10

Angeordnete Körper, reelle Zahlen

Ein angeordneter Körper $(K, \leqslant)$ heisst *archimedisch*, wenn für jedes $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x < n$.

1. Zeige, dass ein angeordneter Körper genau dann archimedisch ist, wenn er isomorph ist zu einem Unterkörper von $\mathbb{R}$ mit der induzierten Ordnung.

   Lösung: Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, gilt dasselbe für jeden Unterkörper; also gilt die Implikation $\Rightarrow$. Für die Umkehrung sei $(K, \leqslant)$ ein archimedischer angeordneter Körper. Um die Einbettungen von $\mathbb{Q}$ nach K und $\mathbb{R}$ zu unterscheiden, bezeichnen wir diese mit $i\colon \mathbb{Q} \hookrightarrow K$ und $j\colon \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Wie in der Vorlesung betrachten wir für jedes $x \in K$ die Menge $A_x := \{a \in \mathbb{Q} \mid i(a) < x\}$. Da K archimedisch ist, existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x < i(m)$ und $-x < i(n)$ und daher $i(-n) < x$. Somit ist $-n \in A_x$ und $a < m$ für alle $a \in A_x$; also ist A_x eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Q}$. Dasselbe gilt dann auch für ihr Bild $j(A_x) \subseteq \mathbb{R}$. Dadurch erhalten wir eine wohldefinierte Funktion

   $$f\colon K \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sup(j(A_x)).$$

   Damit diese die gesuchten Eigenschaften hat, zeigen wir zuerst:

   Behauptung 1: Für alle $x, y \in K$ gilt:

   (a) Ist $x < y$, so existiert ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < i(a) < y$.
   (b) $A_{x+y} = \{a + b \mid a \in A_x,\ b \in A_y\}$
   (c) $A_{-x} = \{a - b \mid a \in \mathbb{Q}^{<0},\ b \in \mathbb{Q} \smallsetminus A_x\}$
   (d) $A_{x\cdot y} = \{a \cdot b \mid a \in A_x,\ b \in A_y,\ a, b \geqslant 0\} \cup \mathbb{Q}^{<0}$ im Fall $x, y \geqslant 0$
   (e) $x \leqslant y \iff A_x \subseteq A_y$

   Beweis: Die Aussage (a) folgt daraus, dass K archimedisch ist, wie in der Vorlesung vom 25. 04. 2023. Die Aussagen (b) bis (e) folgen nun daraus wie in derselben Vorlesung. $\square$

   Behauptung 2: Für alle $a \in \mathbb{Q}$ und $x, y \in K$ gilt:

   (a) $f(i(a)) = j(a)$.
   (b) $f(-x) = -f(x)$.
   (c) $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(d) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

(e) $x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

Beweis: Die Aussagen (a) bis (d) und die Implikation „$\Rightarrow$“ in (e) beweist man genau wie in der Vorlesung vom 02. 05. 2023. Es bleibt, die Implikation „$\Leftarrow$“ in (e) zu zeigen. Diese ist äquivalent zu ihrer kontrapositiven Aussage:

(e′) $y < x \Rightarrow f(y) < f(x)$.

Nach Annahme ist dann $x - y > 0$, und aufgrund der archimedischen Eigenschaft von K existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ und $x - y > i(\frac{1}{n})$. Also gilt $y + i(\frac{1}{n}) \leqslant x$, und aus (a), (c) und (e) folgt daraus

$$f(y) + j(\tfrac{1}{n}) \;=\; f(y) + f(i(\tfrac{1}{n})) \;=\; f(y + i(\tfrac{1}{n})) \;\leqslant f(x).$$

Wegen $0 < j(\frac{1}{n})$ folgt daraus $f(y) < f(x)$, wie gewünscht. □

Nach Behauptung 2 induziert f einen ordnungserhaltenden Körperisomorphismus von K auf sein Bild, wie gewünscht.

2. Ein Ausdruck der Form $f(X) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n X^n$ in einem Variablensymbol X mit beliebigen $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \mathbb{R}$ heisst eine *formale Laurentreihe mit Koeffizienten in* $\mathbb{R}$. Dabei darf n_0 negativ sein, und die Konvergenz beim Einsetzen konkreter Werte für X ist irrelevant. Summe und Produkt zweier formaler Laurentreihen sind definiert analog wie bei Potenzreihen. Zusammen mit $0, 1 \in \mathbb{R}$ bildet die Menge $\mathbb{R}((X))$ aller Laurentreihen einen Körper. (Dies ist hier nicht zu beweisen.)

   Eine Laurentreihe erklären wir nun als positiv, wenn sie ungleich Null ist und ihr erster nichtverschwindende Koeffizient in $\mathbb{R}$ positiv ist. Weiter definieren wir $f < g$ genau dann, wenn $g - f$ positiv ist. Zeige, dass dies $\mathbb{R}((X))$ zu einem nicht-archimedischen angeordneten Körper macht.

   Lösung: Zuerst zeigen wir für alle $f, g \in \mathbb{R}((X))$:

   Behauptung: Sind f und g positiv, so auch $f + g$ und $f \cdot g$.

   Beweis: Wir schreiben $f = \sum_{n \geqslant n_0} a_n X^n$ und $g = \sum_{m \geqslant m_0} b_m X^m$ mit $a_{n_0} > 0$ und $b_{m_0} > 0$. Nach etwaigem Vertauschen von f und g können wir dabei $n_0 \leqslant m_0$ annehmen. Dann hat $f + g$ den ersten nichtverschwindenden Koeffizienten $a_{n_0} > 0$ im Fall $n_0 < m_0$, beziehungsweise $a_{n_0} + b_{m_0} > 0$ im Fall $n_0 = m_0$. In beiden Fällen ist $f + g$ also positiv. Sodann ist das Produkt

$$f \cdot g \;=\; \sum_{n \geqslant n_0} a_n X^n \cdot \sum_{m \geqslant m_0} b_m X^m \;=\; \sum_{k \geqslant n_0 + m_0} \Bigg(\sum_{\substack{n \geqslant n_0 \\ m \geqslant m_0 \\ n+m=k}} a_n b_m \Bigg) X^k.$$

   Der Koeffizient für $k = n_0 + m_0$ ist dabei $a_{n_0} b_{m_0} > 0$, also ist $f \cdot g$ positiv. □

Nach Definition ist nun $f < g$ genau dann, wenn $g - f$ positiv ist. Da die Laurentreihe 0 nicht positiv ist, gilt für alle f insbesondere $f \not< f$; also ist die Relation antireflexiv. Sodann betrachte $f, g, h \in \mathbb{R}((X))$ mit $f < g < h$. Dann sind $g - f$ und $h - g$ positiv; nach der obigen Behauptung ist also auch $(h-g)+(g-f) = h-f$ positiv. Somit folgt $f < h$, und die Relation ist transitiv. Schliesslich ist immer entweder $g - f = 0$, oder der erste nichtverschwindende Koeffizient von $g - f$ ist positiv oder negativ. Also ist $g - f$ gleich Null oder positiv oder $f - g$ ist positiv. Entsprechend ist daher $f = g$ oder $f < g$ oder $g < f$; somit ist die Relation total. Nach Aufgabe 2 von Serie 4 ist $<$ daher eine strikte Totalordnung auf $\mathbb{R}((X))$.

Seien nun $f, g, h \in \mathbb{R}((X))$ mit $f \leqslant g$. Im Fall $f = g$ gilt dann $f + h = g + h$. Andernfalls ist $f < g$ und damit $g - f = (g + h) - (f + h)$ positiv und daher $f+h < g+h$. In beiden Fällen folgt also $f+h \leqslant g+h$. Sodann seien $f, g \in \mathbb{R}((X))$ mit $f \geqslant 0$ und $g \geqslant 0$. Im Fall $f = 0$ oder $g = 0$ ist dann auch $f \cdot g = 0$. Andernfalls sind f und g positiv und nach der obigen Behauptung also auch $f \cdot g$. In beiden Fällen folgt also $f \cdot g \geqslant 0$. Insgesamt wird $\mathbb{R}((X))$ dadurch zu einem angeordneten Körper.

Schliesslich betrachten wir die Laurentreihe X^{-1}. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann $X^{-1} - n$ positiv, also gilt $X^{-1} > n$. Es existiert also kein $n \in \mathbb{N}$ mit $X^{-1} < n$. Somit ist $\mathbb{R}((X))$ mit dieser Ordnung nicht archimedisch.

*3. *Alternative Konstruktion der reellen Zahlen:* Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *quasi-linear*, wenn die Menge

$$\{f(n+m) - f(n) - f(m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

endlich ist. Wir nennen zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *äquivalent*, wenn die Menge

$$\{f(n) - g(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

endlich ist. Zeige:

(a) Die Äquivalenz von quasi-linearen Funktionen ist eine Äquivalenzrelation. Sei $\mathbb{L}$ die Menge ihrer Äquivalenzklassen.

(b) Für jede reelle Zahl x ist die Funktion $f_x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \lfloor nx \rfloor$ quasi-linear.

(c) Die dadurch induzierte Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$, $x \mapsto [f_x]$ ist bijektiv.

(d) Beschreibe die beiden Abbildungen $\mathbb{L} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, die der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ entsprechen.

Lösung:

(a) Wir schreiben Q für die Menge der quasi-linearen Funktionen und $f \sim g$ für äquivalente $f, g \in Q$. Sei $f \in Q$. Dann ist

$$\{f(n) - f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \;=\; \{0\}$$

endlich; also gilt $f \sim f$. Sodann betrachte $f, g \in Q$ mit $f \sim g$. Dann gilt

$$\{g(n) - f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \;=\; -\{f(n) - g(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Hier ist die rechte Seite nach Voraussetzung endlich, also auch die linke Seite; somit gilt $g \sim f$. Weiter seien $f, g, h \in Q$ mit $f \sim g$ und $g \sim h$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\big\{f(n) - h(n) \bigm| n \in \mathbb{Z}\big\} \;&=\; \big\{(f(n) - g(n)) + (g(n) - h(n)) \bigm| n \in \mathbb{Z}\big\}\\ &\subseteq\; \big\{f(n) - g(n) \bigm| n \in \mathbb{Z}\big\} + \big\{g(n) - h(n) \bigm| n \in \mathbb{Z}\big\}.\end{aligned}$$

Als Summe zweier endlichen Menge ist diese Menge endlich; also folgt $f \sim h$.

(b) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt $|\lfloor y \rfloor - y| \leqslant 1$. Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ folgt daraus mit der Dreiecksungleichung

$$\big|\lfloor (n+m)x \rfloor - \lfloor nx \rfloor - \lfloor mx \rfloor\big| \;\leqslant\; |(n+m)x - nx - mx| + 3 \;=\; 3.$$

Somit ist die Menge

$$\big\{f_x(n+m) - f_x(n) - f_x(m) \bigm| m, n \in \mathbb{Z}\big\}$$

endlich und die Abbildung f_x quasi-linear.

(c) Nach Konstruktion ist $\varphi(x) \in \mathbb{L}$ die Äquivalenzklasse von $f_x \in Q$. Betrachte zuerst $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = \varphi(y)$. Dann ist $f_x \sim f_y$ und die Menge

$$\{f(n) - g(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

daher endlich. Somit existiert $C \in \mathbb{N}$ mit $|\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny \rfloor| \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wegen $|\lfloor z \rfloor - z| \leqslant 1$ für alle $z \in \mathbb{R}$ folgt daraus $n|x-y| = |nx - ny| \leqslant C + 2$. Insbesondere gilt $|x - y| \leqslant \frac{C+2}{n}$ für alle $n \geqslant 1$ und daher $|x - y| = 0$. Also folgt $x = y$ und φ ist injektiv.

Betrachte nun ein beliebiges $f \in Q$. Wir behaupten:

(i) Es existiert $C \in \mathbb{N}$ mit $|f(mn) - mf(n)| \leqslant mC$ für alle $n, m > 0$.

(ii) Die Folge $(x_n) = \big(\frac{f(n)}{n}\big)_{n>0}$ ist eine Cauchy-Folge.

(iii) Für ihren Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ gilt $f \sim f_x$.

Aus (iii) folgt dann $[f] = \varphi(x)$; also ist φ surjektiv, und daher bijektiv.

Beweis der Behauptung:

(i) Weil f quasi-linear ist, existiert $C \in \mathbb{N}$ mit

$$(*) \qquad \big|f(k+\ell) - f(k) - f(\ell)\big| \;\leqslant\; C$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Für $m = 1$ ist die Aussage $|f(1n) - 1f(n)| = 0 \leqslant 1C$ offensichtlich. Gilt sie für gegebenes $m > 0$, so folgt mit der Dreiecksungleichung und $(*)$

$$\begin{aligned}\big|f((m+1)n) - (m+1)f(n)\big| &= \big|f(mn+n) - f(mn) - f(n) + f(mn) - mf(n)\big| \\ &\leqslant \big|f(mn+n) - f(mn) - f(n)\big| + \big|f(mn) - mf(n)\big| \\ &\leqslant C + mC \\ &\leqslant (m+1)C,\end{aligned}$$

also gilt sie auch für $m+1$. Durch Induktion folgt sie für alle $m > 0$.

(ii) Für alle $n, m > 0$ erhalten wir durch zweimalige Anwendung von (i)

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(n)}{n} - \frac{f(m)}{m}\right| &= \left|\frac{f(nm) - nf(m)}{mn} - \frac{f(mn) - mf(n)}{mn}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{f(nm) - nf(m)}{mn}\right| + \left|\frac{f(mn) - mf(n)}{mn}\right| \\ &\leqslant \frac{nC}{mn} + \frac{mC}{mn} \\ &= \frac{C}{m} + \frac{C}{n}.\end{aligned}$$

Also ist die Folge eine Cauchy-Folge.

(iii) Betrachte ein $m > 0$. Wegen $x = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$ existiert dann ein $n_0 > 0$ mit $\left|\frac{f(n)}{n} - x\right| \leqslant \frac{1}{m}$ für alle $n \geqslant n_0$. Insbesondere gilt dies für $n = n_0 m$, also ist $\left|\frac{f(n_0 m)}{n_0} - mx\right| \leqslant 1$. Mit (i) folgt daraus

$$\begin{aligned}|f(m) - mx| &= \left|\frac{f(n_0 m) - n_0 m x}{n_0} - \frac{f(n_0 m) - n_0 f(m)}{n_0}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{f(n_0 m)}{n_0} - mx\right| + \left|\frac{f(n_0 m) - n_0 f(m)}{n_0}\right| \\ &\leqslant 1 + C.\end{aligned}$$

Weiter folgt aus $(*)$ auch

$$\big|f(0) - f(m) - f(-m)\big| \leqslant C$$

und daher

$$\begin{aligned}\big|f(-m) - (-m)x\big| &= \big|f(0) - (f(0) - f(m) - f(-m)) - (f(m) - mx)\big| \\ &\leqslant \big|f(0)\big| + \big|f(0) - f(m) - f(-m)\big| + \big|f(m) - mx\big| \\ &\leqslant |f(0)| + C + 1 + C.\end{aligned}$$

Ausserdem ist $|f(0)-0x| = |f(0)|$. Insgesamt folgt daraus für alle $m' \in \mathbb{Z}$

$$\big|f(m') - m'x\big| \;\leqslant\; |f(0)| + 2C + 1.$$

Wegen $|m'x - \lfloor m'x \rfloor| \leqslant 1$ folgt daraus schliesslich

$$\big|f(m') - f_x(m')\big| \;\leqslant\; |f(0)| + 2C + 2.$$

Für die ganze Zahl $f(m') - f_x(m')$ gibt es daher nur endlich viele Möglichkeiten; also gilt $f \sim f_x$. □

(d) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$|f_{x+y}(n) - f_x(n) - f_y(n)| \;=\; |\lfloor n(x+y) \rfloor - \lfloor nx \rfloor - \lfloor ny \rfloor| \leqslant 3$$

und folglich $f_{x+y} \sim f_x + f_y$. Also entspricht die Addition in $\mathbb{R}$ der punktweisen Addition von quasi-linearen Funktionen. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \big|f_x \circ f_y(n) - f_{xy}(n)\big| &= \big|\lfloor x \lfloor yn \rfloor \rfloor - \lfloor xyn \rfloor\big| \\ &\leqslant 2 + \big|x \lfloor yn \rfloor - xyn\big| \\ &= 2 + |x| \cdot \big|\lfloor yn \rfloor - yn\big| \\ &\leqslant 2 + |x|. \end{aligned}$$

Also gilt $f_x \circ f_y \sim f_{xy}$, und die Multiplikation in $\mathbb{R}$ entspricht der Komposition von quasi-linearen Funktionen.

Bemerkung: Man kan unschwer direkt zeigen, dass die Addition und Komposition von quasi-linearen Funktionen wohldefinierte Abbildungen $\mathbb{L} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ induzieren.