Grundstrukturen

FS 2023

Serie 12

Schubfachprinzip

1. Zeige, dass unter drei ganzen Zahlen immer zwei existieren, so dass $a^3b - ab^3$ durch 10 teilbar ist.

2. Zwanzig paarweise verschiedene natürliche Zahlen sind alle < 70. Beweise, dass unter den paarweisen Differenzen mindestens vier gleiche Zahlen auftreten.

3. Zeige, dass jede Folge ganzer Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ der Länge $n \geqslant 5$ eine nichtleere Teilfolge besitzt, deren Elemente geeignet addiert oder subtrahiert ein Vielfaches von n^2 ergeben.

4. Für je $k > \frac{n+1}{2}$ ganze Zahlen $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqslant n$ existieren Indizes $1 \leqslant i < r \leqslant k$ mit $a_1 + a_i = a_r$.

*5. Ein unendlich grosses Schachbrett besteht aus Quadraten der Grösse 1×1. Ein Floh beginnt irgendwo und springt unendlich oft um den Betrag α nach rechts und β nach oben, wobei $\alpha, \beta, \alpha/\beta$ alle irrational sind. Beweise, dass der Floh irgendwann einmal auf einem schwarzen Feld landet.

6. Zeige: Es existieren ganze Zahlen a, b, c mit $|a|, |b|, |c| < 10^6$, die nicht alle gleich Null sind und für die gilt

$$\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| \ < \ 10^{-11}.$$

7. Eine ganze Zahl heisst *quadratfrei*, wenn sie nicht durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist. Betrachte eine quadratfreie ganze Zahl $d > 1$. Zeige: Es existiert ein $M \in \mathbb{R}$, so dass für unendlich viele Paare $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ gilt:

$$|p^2 - dq^2| \leqslant M.$$