Serie 13

Erzeugende Funktionen, Inklusion und Exklusion

1. (a) Finde für $k \geqslant 0$ eine geschlossene Form für die Potenzreihe

$$\sum_{m \geqslant k} \binom{m}{k} X^m.$$

(b) Bestimme für alle $n \geqslant 0$ die Zahlen

$$f_n \;:=\; \sum_{0 \leqslant k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

2. *Homogene und inhomogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten:* Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Folge ...

(a) mit $a_0 := a_1 := 1$ und $a_n := 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ für alle $n \geqslant 2$.

(b) mit $b_0 := b_1 := 0$ und $b_2 := 1$ und $b_n := 2b_{n-1} + b_{n-2} - 2b_{n-3}$ für alle $n \geqslant 3$.

(c) mit $c_0 := c_1 := 0$ und $c_n := 2c_{n-1} - c_{n-2} + 1$ für alle $n \geqslant 2$.

*3. *Allgemeine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten:* Betrachte $d \geqslant 0$ und Koeffizienten $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$.

(a) Zeige, dass für jede Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ mit $a_n = \sum_{i=1}^d c_i a_{n-i}$ für alle $n \gg 0$ Konstanten $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und Polynome $P_j \in \mathbb{C}[X]$ existieren, so dass für alle $n \gg 0$ gilt

$$a_n \;=\; \sum_{j=1}^{r} P_j(n)\lambda_j^n.$$

(b) Gilt dasselbe für jede Folge, die eine inhomogene lineare Rekursion der Form

$$a_n \;=\; \sum_{i=1}^{d} c_i a_{n-i} + \sum_{k=1}^{s} Q_k(n)\mu_k^n$$

erfüllt für alle $n \gg 0$ mit Konstanten $\mu_k \in \mathbb{C}$ und Polynomen $Q_k \in \mathbb{C}[X]$?

4. Für natürliche Zahlen k, n sei $a_{k,n}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, welche keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten. Bestimme $a_{k,n}$ durch Aufstellen einer Rekursionsrelation und Lösen derselben mittels erzeugenden Funktionen.

5. Für gegebene natürliche Zahlen n, m sei X die Menge aller Funktionen

$$\{1, 2, \ldots, n\} \twoheadrightarrow \{1, 2, \ldots, m\}.$$

   (a) Bestimme die Anzahl $s_{n,m}$ aller Surjektionen in X.

   (b) Bestimme die durchschnittliche Grösse von $\mathrm{Bild}(f)$ für $f \in X$.

6. Sei μ die Möbiussche Umkehrfunktion. Zeige:

   (a) Für alle $n \geqslant 1$ mit genau k verschiedenen Primfaktoren gilt

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| \;=\; 2^k.$$

   (b) Für je zwei Funktionen $F, G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon G(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} F\big(\tfrac{x}{n}\big) \iff \forall x \in \mathbb{R}\colon F(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) G\big(\tfrac{x}{n}\big)$$

7. Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbb{Z}^{\geqslant 1} \to \mathbb{C}$ *(schwach) multiplikativ*, falls für alle $m, n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ die Gleichung $f(mn) = f(m)f(n)$ gilt. Zeige:

   (a) Für je zwei multiplikative Funktionen f und g ist auch $f * g$ multiplikativ.

   (b) Eine Funktion f ist multiplikativ genau dann, wenn $\mu * f$ multiplikativ ist.