Musterlösung Serie 13

Erzeugende Funktionen, Inklusion und Exklusion

1. (a) Finde für $k \geqslant 0$ eine geschlossene Form für die Potenzreihe

$$\sum_{m \geqslant k} \binom{m}{k} X^m.$$

(b) Bestimme für alle $n \geqslant 0$ die Zahlen

$$f_n \;:=\; \sum_{0 \leqslant k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

Lösung:

(a) Die allgemeine Binomialreihe mit negativen Exponenten zeigt

$$(1-X)^{-(k+1)} \;=\; \sum_{\ell \geqslant 0} \binom{k+\ell}{\ell} X^\ell \;=\; \sum_{\ell \geqslant 0} \binom{k+\ell}{k} X^\ell \;=\; \sum_{m \geqslant k} \binom{m}{k} X^{m-k}$$

und daher

$$\frac{X^k}{(1-X)^{k+1}} \;=\; \sum_{m \geqslant k} \binom{m}{k} X^m.$$

(b) Wir berechnen die erzeugende Funktion mittels der Substitution $n = m + k$:

$$F(X) \;:=\; \sum_{n \geqslant 0} f_n X^n \;=\; \sum_{k \geqslant 0,\, n \geqslant 2k} \binom{n-k}{k} X^n \;=\; \sum_{k \geqslant 0} \sum_{m \geqslant k} \binom{m}{k} X^{m+k}.$$

Mit (a) folgt daraus

$$\begin{aligned} F(X) \;&=\; \sum_{k \geqslant 0} \frac{X^k}{(1-X)^{k+1}} \cdot X^k \;=\; \frac{1}{1-X} \cdot \sum_{k \geqslant 0} \Big(\frac{X^2}{1-X} \Big)^k \\ &=\; \frac{1}{1-X} \cdot \frac{1}{1 - \frac{X^2}{1-X}} \;=\; \frac{1}{1-X-X^2}. \end{aligned}$$

Dies ist dieselbe erzeugende Funktion wie für die Fibonacci-Zahlen F_n. Daher gilt $f_n = F_n$ für alle n.

2. *Homogene und inhomogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten:* Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Folge ...

   (a) mit $a_0 := a_1 := 1$ und $a_n := 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ für alle $n \geqslant 2$.

   (b) mit $b_0 := b_1 := 0$ und $b_2 := 1$ und $b_n := 2b_{n-1} + b_{n-2} - 2b_{n-3}$ für alle $n \geqslant 3$.

   (c) mit $c_0 := c_1 := 0$ und $c_n := 2c_{n-1} - c_{n-2} + 1$ für alle $n \geqslant 2$.

   Lösung:

   (a) Wir berechnen die erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} F(X) \;:=\; \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \;&=\; 1 + X + \sum_{n\geqslant 2}\big(4a_{n-1} - 4a_{n-2}\big)X^n \\ &=\; 1 + X + \sum_{m\geqslant 1} 4a_m X^{m+1} - \sum_{m\geqslant 0} 4a_m X^{m+2} \\ &=\; 1 + X + 4X(F(X) - 1) - 4X^2 F(X). \\ &=\; 1 - 3X + (4X - 4X^2)F(X). \end{aligned}$$

   Auflösen nach F zeigt also

$$F(X) \;=\; \frac{1-3X}{1-4X+4X^2} \;=\; \frac{1-3X}{(1-2X)^2}.$$

   Die Binomialreihe mit dem Exponenten -2 liefert nun

$$\begin{aligned} F(X) \;&=\; (1-3X)\cdot\sum_{k\geqslant 0}(k+1)(2X)^k \\ &=\; \sum_{k\geqslant 0}(k+1)2^k(X^k - 3X^{k+1}) \\ &=\; \sum_{k\geqslant 0}(k+1)2^k X^k - \sum_{n\geqslant 1} 3n2^{n-1}X^n \\ &=\; \sum_{n\geqslant 0}\big((n+1)2^n - 3n2^{n-1}\big)X^n \\ &=\; \sum_{n\geqslant 0} 2^{n-1}(2-n)X^n. \end{aligned}$$

   Also erhalten wir $a_n = 2^{n-1}(2-n)$.

   (b) Wir berechnen die erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} G(X) \;:=\; \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n \;&=\; X^2 + \sum_{n\geqslant 3}\big(2b_{n-1} + b_{n-2} - 2b_{n-3}\big)X^n \\ &=\; X^2 + \sum_{m\geqslant 2} 2b_m X^{m+1} + \sum_{m\geqslant 1} b_m X^{m+2} - \sum_{m\geqslant 0} 2b_m X^{m+3} \\ &=\; X^2 + 2XG(X) + X^2 G(X) - 2X^3 G(X). \end{aligned}$$

Auflösen nach G zeigt also

$$G(X) \;=\; \frac{X^2}{1-2X-X^2+2X^3} \;=\; \frac{X^2}{(1+X)(1-X)(1-2X)}.$$

Mit der Partialbruchzerlegung und der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\begin{aligned} G(X) \;&=\; \frac{\frac{1}{6}}{1+X} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-X} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2X} \\ &=\; \tfrac{1}{6}\sum_{n\geqslant 0}(-X)^n - \tfrac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} X^n + \tfrac{1}{3}\sum_{n\geqslant 0}(2X)^n \\ &=\; \sum_{n\geqslant 0}\big(\tfrac{1}{6}(-1)^n - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}2^n\big)X^n \end{aligned}$$

Also folgt $b_n = \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}2^n$.

(c) Wir berechnen die erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} H(X) \;:=\; \sum_{n\geqslant 0} c_n X^n \;&=\; \sum_{n\geqslant 2}\big(2c_{n-1} - c_{n-2} + 1\big)X^n \\ &=\; \sum_{m\geqslant 1} 2c_m X^{m+1} - \sum_{m\geqslant 0} c_m X^{m+2} + \sum_{m\geqslant 0} X^{m+2} \\ &=\; 2XH(X) - X^2 H(X) + \frac{X^2}{1-X}. \end{aligned}$$

Auflösen nach H zeigt also

$$H(X) \;=\; \frac{X^2}{(1-2X+X^2)(1-X)} \;=\; \frac{X^2}{(1-X)^3}.$$

Die Binomialreihe mit dem Exponenten -3 liefert nun

$$H(X) \;=\; X^2 \cdot \sum_{k\geqslant 0}\binom{k+2}{k}X^k \;=\; X^2 \cdot \sum_{k\geqslant 0}\frac{(k+2)(k+1)}{2}X^k \;=\; \sum_{n\geqslant 0}\frac{n(n-1)}{2}X^n.$$

Also erhalten wir $c_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

*3. *Allgemeine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten:* Betrachte $d \geqslant 0$ und Koeffizienten $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$.

(a) Zeige, dass für jede Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ mit $a_n = \sum_{i=1}^d c_i a_{n-i}$ für alle $n \gg 0$ Konstanten $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und Polynome $P_j \in \mathbb{C}[X]$ existieren, so dass für alle $n \gg 0$ gilt

$$a_n \;=\; \sum_{j=1}^r P_j(n)\lambda_j^n.$$

(b) Gilt dasselbe für jede Folge, die eine inhomogene lineare Rekursion der Form

$$a_n \;=\; \sum_{i=1}^d c_i a_{n-i} + \sum_{k=1}^s Q_k(n)\mu_k^n$$

erfüllt für alle $n \gg 0$ mit Konstanten $\mu_k \in \mathbb{C}$ und Polynomen $Q_k \in \mathbb{C}[X]$?

Lösung:

(a) Nach der Vorlesung ist die erzeugende Funktion $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ die Laurententwicklung einer rationalen Funktion. Nach der Partialbruchentwicklung ist diese ein Polynom in X und X^{-1} plus eine Summe von Termen der Form $c_j(1-\lambda_j X)^{-\nu_j}$ mit Konstanten $c_j, \lambda_j \in \mathbb{C}$ und Exponenten $\lambda_j \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1}$. Nach der Binomialreihe mit negativen Exponenten ist dieser Term gleich

$$c_j \sum_{n\geqslant 0} \binom{\nu_j+n-1}{n} (\lambda_j X)^n \;=\; \sum_{n\geqslant 0} c_j \binom{\nu_j+n-1}{\nu_j-1} \lambda_j^n X^n \;=\; \sum_{n\geqslant 0} P_j(n)\lambda_j^n X^n$$

für das Polynom $P_j(X) := c_j\binom{\nu_j+X-1}{\nu_j-1}$. Die Behauptung folgt durch Koeffizientenvergleich.

(b) Ja! Wir behaupten, dass jede solche Folge auch eine homogene lineare Rekursion wie in (a) erfüllt (mit möglicherweise anderen Werten von d und c_j), so dass die Behauptung direkt aus (a) folgt. Um die Behauptung zu zeigen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle $Q_k \neq 0$ annehmen. Wir machen dann Induktion über $N := \sum_{k=1}^s(\deg(Q_k)+1)$. Im Fall $N = 0$ ist $s = 0$ und nichts zu zeigen. Andernfalls betrachten wir die Folge $b_n := a_{n+1} - \mu_s a_n$ und rechnen für alle $n \gg 0$

$$\begin{aligned} b_n - \sum_{i=1}^d c_i b_{n-i} &= \Big(a_{n+1} - \sum_{i=1}^d c_i a_{n+1-i}\Big) - \mu_s\Big(a_n - \sum_{i=1}^d c_i b_{n-i}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^s Q_k(n+1)\mu_k^{n+1} - \mu_s \sum_{k=1}^s Q_k(n)\mu_k^n \\ &= \sum_{k=1}^s \big(\mu_k Q_k(n+1) - \mu_s Q_k(n)\big)\mu_k^n \end{aligned}$$

Hier ist jedes $R_k(X) := \mu_k Q_k(X+1) - \mu_s Q_k(X)$ ein Polynom vom Grad $\leqslant \deg(Q_k)$, und für $k = s$ hat es sogar Grad $< \deg(Q_k)$, weil jede Differenz der Form $(X+1)^m - X^m$ ein Polynom vom Grad $< m$ ist. Also erfüllt die Folge (b_n) eine lineare Rekursion derselben Art mit kleinerem Wert von N. Nach der Induktionsvoraussetzung erfüllt diese also eine homogene lineare Rekursion der Form $b_n = \sum_{i=1}^{d'} c'_i b_{n-i}$ für alle $n \gg 0$. Daraus folgt nun aber

$$a_n = \mu_s a_{n-1} + b_{n-1} = \mu_s a_{n-1} + \sum_{i=1}^{d'} c'_i b_{n-1-i} = \mu_s a_{n-1} + \sum_{i=1}^{d'} c'_i (a_{n-i} - \mu_s a_{n-1-i})$$

für alle $n \gg 0$, so dass die Behauptung auch für die Folge (a_n) gilt. Damit sind wir fertig.

4. Für natürliche Zahlen k, n sei $a_{k,n}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, welche keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten. Bestimme $a_{k,n}$ durch Aufstellen einer Rekursionsrelation und Lösen derselben mittels erzeugenden Funktionen.

   Lösung: Zunächst gilt

$$\begin{aligned} a_{0,n} &= 1 \quad \text{für alle } n \geqslant 0, \\ a_{k,0} &= 0 \quad \text{für alle } k \geqslant 1, \\ a_{1,1} &= 1 \quad \text{sowie} \\ a_{k,1} &= 0 \quad \text{für alle } k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Sodann gibt es für alle $k \geqslant 1$ und $n \geqslant 2$ zwei disjunkte Möglichkeiten für die fragliche Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$: Entweder sie ist schon eine k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n-1\}$, oder sie ist die Vereinigung von $\{n\}$ und einer k-elementigen Teilmenge von $\{1, \ldots, n-2\}$. Entsprechend gilt somit

$$a_{k,n} = a_{k,n-1} + a_{k-1,n-2}.$$

Für die erzeugende Funktion gilt daher

$$\begin{aligned} F &:= \sum_{k,n \geqslant 0} a_{k,n} X^k Y^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} Y^n + XY + \sum_{k \geqslant 1,\, n \geqslant 2} (a_{k,n-1} + a_{k-1,n-2}) X^k Y^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} Y^n + XY + \sum_{k \geqslant 1,\, m \geqslant 1} a_{k,m} X^k Y^{m+1} + \sum_{\ell \geqslant 0,\, m \geqslant 0} a_{\ell,m} X^{\ell+1} Y^{m+2} \\ &= \sum_{n \geqslant 0} Y^n + XY + \Big(F - \sum_{m \geqslant 0} Y^m\Big) \cdot Y + F \cdot XY^2 \\ &= 1 + XY + F \cdot (1 + XY)Y. \end{aligned}$$

Auflösen dieser Gleichung nach F liefert nun

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1+XY}{1-(1+XY)Y} \\
&= \sum_{m\geqslant 0}(1+XY)^{m+1}Y^m \\
&= \sum_{m,k\geqslant 0}\binom{m+1}{k}X^kY^{k+m} \\
&= \sum_{n\geqslant k\geqslant 0}\binom{n-k+1}{k}X^kY^n.
\end{aligned}$$

Ausserdem ist $\binom{n-k+1}{k}=0$ für alle $0\leqslant n<k$. Für alle $k,n\geqslant 0$ gilt daher

$$a_{k,n} = \binom{n-k+1}{k}.$$

5. Für gegebene natürliche Zahlen n,m sei X die Menge aller Funktionen

$$\{1,2,\ldots,n\} \twoheadrightarrow \{1,2,\ldots,m\}.$$

   (a) Bestimme die Anzahl $s_{n,m}$ aller Surjektionen in X.

   (b) Bestimme die durchschnittliche Grösse von $\mathrm{Bild}(f)$ für $f\in X$.

   Lösung: Zuerst beachten wir $|X|=m^n$. (Man überprüfe, dass dies auch richtig ist für $m=0$, wo der Zielbereich die leere Menge ist.) Für jedes $1\leqslant i\leqslant m$ sei X_i die Menge aller Funktionen $f\in X$ mit $i\notin\mathrm{Bild}(f)$.

   (a) Die Menge Y aller Surjektionen ist das Komplement von $X_0\cap\ldots\cap X_m$ in X. Um ihre Kardinalität zu bestimmen, betrachten wir für jede Teilmenge $I\subseteq\{1,\ldots,m\}$ die Menge

$$X_I := \big\{f\in X \;\big|\; \forall i\in I\colon i\notin\mathrm{Bild}(f)\big\}$$

   aller Funktionen $\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,m\}\smallsetminus I$. Da hier der Zielbereich die Kardinalität ist $m-|I|$ hat, gilt $|X_I|=(m-|I|)^n$. Nach dem Satz über Inklusion und Exklusion gilt folglich

$$\begin{aligned}
s_{n,m} &= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,m\}}(-1)^{|I|}\cdot|X_I| \\
&= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,m\}}(-1)^{|I|}\cdot(m-|I|)^n \\
&= \sum_{0\leqslant r\leqslant m}\binom{m}{r}(-1)^k\cdot(m-r)^n.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $m-r=k$ erhalten wir die etwas einfachere Formel

$$s_{n,m} \;=\; \sum_{0\leqslant k\leqslant m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k}\cdot k^n.$$

(b) Die durchschnittliche Grösse von $\mathrm{Bild}(f)$ für $f\in X$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|X|}\cdot\sum_{f\in X}|\,\mathrm{Bild}(f)| \;&=\; \frac{1}{m^n}\cdot\Big|\big\{(f,i)\;\big|\; f\in X,\; i\in\mathrm{Bild}(f)\big\}\Big| \\
&=\; \frac{1}{m^n}\cdot\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\Big|\big\{f\in X\;\big|\; i\in\mathrm{Bild}(f)\big\}\Big| \\
&=\; \frac{1}{m^n}\cdot\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|X\smallsetminus X_i| \\
&=\; \frac{1}{m^n}\cdot\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\big(m^n-(m-1)^n\big) \\
&=\; \frac{m}{m^n}\cdot\big(m^n-(m-1)^n\big) \\
&=\; m\cdot\Big(1-\big(1-\tfrac{1}{m}\big)^n\Big).
\end{aligned}$$

6. Sei μ die Möbiussche Umkehrfunktion. Zeige:

(a) Für alle $n\geqslant 1$ mit genau k verschiedenen Primfaktoren gilt

$$\sum_{d|n}|\mu(d)| \;=\; 2^k.$$

(b) Für je zwei Funktionen $F,G\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ gilt

$$\forall x\in\mathbb{R}\colon G(x)=\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}F\big(\tfrac{x}{n}\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R}\colon F(x)=\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(n)G\big(\tfrac{x}{n}\big)$$

Lösung:

(a) Sei $n=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$ die Primfaktorzerlegung von n mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und Exponenten $a_i\geqslant 1$. Die Teiler von n sind dann die Zahlen $d=p_1^{b_1}\cdots p_k^{b_k}$ mit Exponenten $0\leqslant b_i\leqslant a_i$. Nach Definition der μ-Funktion ist nun $|\mu(d)|=1$, wenn alle $b_i\leqslant 1$ sind, und andernfalls $\mu(d)=0$. Die Anzahl der Tupel $(b_1,\ldots,b_k)$ mit $|\mu(d)|=1$ ist also gleich 2^k, woraus direkt die gewünschte Formel folgt.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ rechnen für die Implikation „⇒“

$$\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) G\big(\tfrac{x}{n}\big) \;=\; \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} F\big(\tfrac{x}{nm}\big) \;=\; \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} F\big(\tfrac{x}{k}\big) \sum_{n|k} \mu(n) \;=\; F(x)$$

und für die Implikation „⇐“

$$\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} F\big(\tfrac{x}{n}\big) \;=\; \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{x}{n} \rfloor} \mu(n) G\big(\tfrac{x}{nm}\big) \;=\; \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} G\big(\tfrac{x}{k}\big) \sum_{n|k} \mu(n) \;=\; G(x),$$

wobei wir jeweils die Substitution $nm = k$ und die Gleichung $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1,n}$ benutzen.

7. Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbb{Z}^{\geqslant 1} \to \mathbb{C}$ *(schwach) multiplikativ*, falls für alle $m, n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ die Gleichung $f(mn) = f(m)f(n)$ gilt. Zeige:

(a) Für je zwei multiplikative Funktionen f und g ist auch $f * g$ multiplikativ.

(b) Eine Funktion f ist multiplikativ genau dann, wenn $\mu * f$ multiplikativ ist.

Lösung:

(a) Seien $m, n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Die Teiler von mn sind dann genau die Produkte de für eindeutige Teiler $d|m$ und $e|n$. Nach der Definition von $f * g$ gilt also

$$(f * g)(mn) \;=\; \sum_{d|m,\, e|n} f\big(\tfrac{mn}{de}\big) g(de).$$

Aus $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ folgt nun aber auch $\mathrm{ggT}(d, e) = 1$ und $\mathrm{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{n}{e}) = 1$. Also folgt

$$\begin{aligned} (f * g)(mn) \;&=\; \sum_{d|m,\, e|n} f\big(\tfrac{m}{d}\big) f\big(\tfrac{n}{e}\big) g(d) g(e) \\ &=\; \sum_{d|m} f\big(\tfrac{m}{d}\big) g(d) \cdot \sum_{e|n} f\big(\tfrac{n}{e}\big) g(e) \\ &=\; (f * g)(m) \cdot (f * g)(n); \end{aligned}$$

also ist $f * g$ multiplikativ.

(b) Da die Möbiussche Funktion μ multiplikativ ist, folgt die Implikation „⇒“ direkt aus (a). Für die Implikation „⇐“ beachten wir, dass die konstante Funktion $\tau_0(n) := 1$ multiplikativ ist. Ist also $\mu * f$ multiplikativ, so ist nach der Möbiusschen Umkehrformel und (a) auch $f = \tau_0 * (\mu * f)$ multiplikativ.