D-MATH | Grundstrukturen | FS 2023
Prof. Richard Pink

Musterlösung Serie 1

Prädikatenlogik

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Übersetzen Sie die folgenden Aussagen möglichst genau in Prädikatenlogik. Es kommt nicht darauf an, ob Sie sie für richtig halten.

   (a) Wenn die Aussage A die Aussage B und die Aussage B die Aussage C impliziert, dann impliziert die Aussage A die Aussage C.

   (b) Das Quadrat jeder rellen Zahl ist positiv.

   (c) Nur wenn man Lotto spielt, gewinnt man im Lotto.

   (d) Es ist nicht alles Gold, was glänzt.

   (e) Wer zuerst kommt, mahlt zuerst.

   (f) Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr.

   (g) *Wählen Sie hier ein weiteres Sprichwort oder Zitat.*

   Lösung:

   (a) $(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C)$

   (b) $\forall\, x \in \mathbb{R}\colon x^2 > 0$

   (c) Korrekt ist „(Man gewinnt im Lotto) $\longrightarrow$ (Man spielt Lotto).“ Ohne das Wörtchen „nur“ wäre die richtige Antwort dagegen „(Man spielt Lotto) $\longrightarrow$ (Man gewinnt im Lotto).“

   (d) $\neg(\forall x\colon ((x \text{ glänzt}) \longrightarrow (x \text{ ist Gold})))$

   (e) $\forall x\colon (\neg\exists y\colon y \text{ kommt vor } x) \longrightarrow (\neg\exists y\colon y \text{ mahlt vor } x)$

   (f) $\forall x\colon \neg(\exists t \leqslant t_0\colon \text{Hans lernt } x \text{ zur Zeit } t) \longrightarrow \neg(\exists t > t_0\colon \text{Hans lernt } x \text{ zur Zeit } t)$

2. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Übersetzen Sie die folgenden prädikatenlogischen Aussagen möglichst genau in natürliche Sprache. Dabei bezeichnet P eine Formel mit einer freien Variable x und R eine zweistellige Relation.

   (a) $\neg(\exists x\colon Px) \longleftrightarrow (\forall x\colon \neg(Px))$

   (b) $P(0) \wedge (\forall n\colon (P(n) \longrightarrow P(n+1))) \longrightarrow (\forall n\colon P(n))$

   (c) $\forall x \forall y \forall z\colon (((xRy \wedge xRz) \vee yRx) \longrightarrow zRx)$

   Lösung:

(a) Es gibt ein x, so dass Px gilt, dann und nur dann, wenn für alle x die Aussage Px nicht gilt.

(b) Falls $P(0)$ gilt, und für alle n die Aussage $P(n)$ die Aussage $P(n+1)$ impliziert, dann gilt $P(n)$ für alle n.

(c) Für alle x, y, z gilt: Wenn xRy und xRz gilt, oder wenn yRx gilt, dann gilt zRx.

3. Welcher Ausdruck bildet eine wohlgeformte Formel, und wenn nicht, warum? Dabei bezeichnet R eine dreistellige Relation, F eine zweistellige Funktion und n eine natürliche Zahl

   (a) $(\forall x \forall y \exists z\colon R(x,y,z)) \longrightarrow \forall x\colon (w = x)$.

   (b) $\forall x \exists y\colon (F(x,y) \longrightarrow (x = y))$.

   (c) $\forall x \forall y$

   (d) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \forall z_1 \ldots \forall z_n : R(x_1, y_1, z_1) \wedge \cdots \wedge R(x_n, y_n, z_n)$.

   Lösung:

   (a) Dieser Ausdruck ist eine wohlgeformte Formel. Man könnte einwenden, dass die Variable w in der Folgerung sonst nicht auftaucht, aber um die Sinnhaftigkeit der Formel geht es hier nicht.

   (b) Dieser Ausdruck ist keine wohlgeformte Formel, weil F ein Funktionssymbol ist und $F(x,y)$ deshalb ein Term, aber keine Formel ist.

   (c) Dieser Ausdruck ist keine wohlgeformte Formel, weil nach dem Allquantor eine Formel fehlt.

   (d) Dieser Ausdruck ist eine Formel. Die natürliche Zahl wurde vor der Definition gewählt, also ist das Zeichen n keine Variable dieser Formel.

4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen mit einer Wahrheitstafel.

   (a) $((A \wedge B) \longrightarrow C) \longleftrightarrow (A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$.

   (b) $(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (A \wedge B) \vee \neg B$

   (c) $(A \longrightarrow C) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \vee B \longrightarrow C))$

   Lösung:

   (a) Die Aussage ist wahr:

A	B	C	$A \wedge B$	$B \longrightarrow C$	$(A \wedge B) \longrightarrow C$	$(A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f
w	f	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w
f	w	f	f	f	w	w
f	f	w	f	w	w	w
f	f	f	f	w	w	w

(b) Die Aussage ist falsch. Ist A wahr und B falsch, so ist die Aussage auf der linken Seite falsch, aber $\neg B$ ist wahr und daher die Aussage auf der rechten Seite ebenfalls.

(c) Die Aussage ist wahr.

A	B	C	$(A \longrightarrow C)$	$B \longrightarrow C$	$A \vee B \longrightarrow C$	$((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \vee B \longrightarrow C))$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w

5. Das wunderschöne Lied „Bim Coiffeur“ von Mani Matter enthält leider zwei mathematische Fehler. Welche?

Bim coiffeur bin i gsässe vor em spiegel, luege dry
Und gseh dert drinn e spiegel wo ar wand isch vis-à-vis
Und dert drin spieglet sech dr spiegel da vor mir
Und i däm spiegel widerum dr spiegel hindefür
Und so geng wyter, sisch gsy win e länge korridor
I däm my chopf gwüss hundertfach vo hinden und vo vor
Isch ufgreit gsy i eier kolonne, z'hinderscht isch dr chopf
I ha ne nümme gchennt, so chly gsy win e goofechnopf
My chopf, dä het sich dert ir wyti, stellet öich das vor
Verloren ir unäntlechkeit vom länge korridor
I ha mi sälber hinde gseh verschwinde, ha das gseh
Am heiterhälle vormittag und wi wenn nüt wär gscheh
Erchloepft han i mys muul ufgschperrt, da sy im korridor
Grad hundert müüler mit ufgange win e männerchor
E männerchor us mir alei, es cheibe gspässigs gfüel

Es metaphysischs grusle het mi packt im coiffeurgstüel
I ha d'serviette vo mer grissen, ungschore sofort
Das coiffeurgschäft verla mit paar entschuldigende wort
Und wenn dir findet i sött e chly meh zum coiffeur ga
De chöit dir jitz verstah warum i da e hemmig ha

Beim Coiffeur sass ich, vor dem Spiegel, schaue rein
und seh dort drin den Spiegel an der Wand von vis-à-vis
und dort drin spiegelt sich der Spiegel da vor mir
und dort drin wiederum der Spiegel hinter mir.
Und so stets weiter, es war wie ein langer Korridor,
in dem mein Kopf gewiss hundertfach von hinten und von vorn
sich aufgereiht fand in einer Kolonne, zu hinterst war mein Kopf.
Ich kannt' ihn nicht mehr, er war so klein wie ein Nadelkopf.
Mein Kopf, der hat sich dort ganz weit, stellen Sie es sich vor,
verloren in der Unendlichkeit des langen Korridors.
Ich sah mich selber hinten verschwinden, hab's gesehen!
Am heiterhellen Vormittag und wie wenn nichts geschehen wäre.
Erschrocken hab ich meinen Mund aufgerissen, da sind im Korridor
gerade hundert Münder aufgegangen wie ein Männerchor.
Ein Männerchor aus mir allein nur, ein ganz komisches Gefühl.
Ein metaphysisches Grausen hat mich gepackt im Coiffeur-Gestühl.
Da hab ich mir die Serviette vom mir gerissen, ungeschoren sofort
das Coiffeur-Geschäft verlassen mit ein paar entschuldigenden Worten;
und wenn Sie nun denken, ich sollte ein bisschen öfter zum Coiffeur gehen,
dann werden Sie sicher verstehen, warum ich da eine Hemmung habe.

Lösung: 1. Wenn Matter seinen Kopf 100 mal sieht, gibt es einen hintersten Kopf; dann kann er ihn aber nicht unendlich oft in der Unendlichkeit verschwinden sehen.

2. Wenn der Liedermacher seinen Kopf 100 mal von hinten und von vorne sieht, dann sieht er ihn nur 50 mal von vorne; darum kann er nur 50 Münder sehen im Männerchor.