Serie 2

Theorien und Modelle

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Schreiben Sie einen etwa halbseitigen Beweis eines Theorems aus dem ersten Semester mustergültig auf. Erklären Sie in ein paar Sätzen, wieso Sie den Beweis gerade so formuliert haben. Strengen Sie sich bei der Korrektur an, ein paar Details zu finden, die man noch verbessern kann.

2. Sei $\mathscr{L}$ die Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol R. Betrachte die $\mathscr{L}$-Sätze:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &:= \forall x\colon xRx \\
\sigma_2 &:= \forall x \forall y\colon xRy \longrightarrow yRx \\
\sigma_3 &:= \forall x \forall y \forall z\colon (xRy \wedge yRz) \longrightarrow xRz.
\end{aligned}$$

Konstruiere drei Modelle M_1, M_2 und M_3, so dass gilt:

(a) $M_1 \models \neg\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$

(b) $M_2 \models \sigma_1 \wedge \neg\sigma_2 \wedge \sigma_3$

(c) $M_3 \models \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \neg\sigma_3$

3. Eine $\mathscr{L}$-Theorie T heisst *vollständig*, falls für jeden $\mathscr{L}$-Satz σ die Aussage $(T \vdash \sigma) \vee (T \vdash \neg\sigma)$ gilt.

   (a) Sei T eine $\mathscr{L}$-Theorie, welche ein Modell besitzt. Beweise, dass es eine vollständige Theorie $\overline{T}$ gibt, so dass die Inklusion $T \subseteq \overline{T}$ gilt.

   (b) Sei T eine $\mathscr{L}$-Theorie, welche ein eindeutiges Modell besitzt. Beweise, dass die Theorie T vollständig ist.

   (c) Konstruieren Sie eine nicht vollständige Theorie.

4. Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur und Φ eine Menge von $\mathscr{L}$-Formeln. Zeige, dass Φ genau dann konsistent ist, wenn jede endliche Teilmenge davon konsistent ist.

5. Seien $\mathscr{L} = \{0, s, +, \cdot\}$ die Signatur und **PA** das Axiomensystem der Peano-Arithmetik gemäss Kapitel 1 des Halbeisen-Skripts. Wir nehmen an, dass die natürlichen Zahlen wirklich existieren und **PA** folglich konsistent ist.

   Sei nun $\mathscr{L}_* := \mathscr{L} \cup \{c\}$ die um ein neues Konstantensymbol c erweiterte Signatur. Für jede natürliche Zahl n betrachte die $\mathscr{L}_*$-Formel

   $$\varphi_n \;:=\; \neg(c = s \ldots s0),$$

   wobei das Symbol s auf der rechten Seite genau n-mal vorkommt.

   (a) Zeige, dass das Axiomensystem $\mathbf{PA}_n := \mathbf{PA} \cup \{\varphi_i \mid 0 \leqslant i < n\}$ konsistent ist.

   (b) Folgere, dass das Axiomensystem $\mathbf{PA}_* := \mathbf{PA} \cup \{\varphi_i \mid i \geqslant 0\}$ konsistent ist.

   (c) Schliesse daraus, dass es ein Modell von **PA** gibt, welches Elemente ausserhalb der natürlichen Zahlen besitzt.