D-MATH | Grundstrukturen | FS 2023
Prof. Richard Pink

Musterlösung Serie 2

Theorien und Modelle

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Schreiben Sie einen etwa halbseitigen Beweis eines Theorems aus dem ersten Semester mustergültig auf. Erklären Sie in ein paar Sätzen, wieso Sie den Beweis gerade so formuliert haben. Strengen Sie sich bei der Korrektur an, ein paar Details zu finden, die man noch verbessern kann.

2. Sei $\mathscr{L}$ die Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol R. Betrachte die $\mathscr{L}$-Sätze:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= \forall x\colon xRx\\ \sigma_2 &:= \forall x \forall y\colon xRy \longrightarrow yRx\\ \sigma_3 &:= \forall x \forall y \forall z\colon (xRy \wedge yRz) \longrightarrow xRz.\end{aligned}$$

Konstruiere drei Modelle M_1, M_2 und M_3, so dass gilt:

(a) $M_1 \models \neg\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$

(b) $M_2 \models \sigma_1 \wedge \neg\sigma_2 \wedge \sigma_3$

(c) $M_3 \models \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \neg\sigma_3$

Lösung: Die Formel σ_1 besagt, dass R reflexiv ist; die Formel σ_2, dass R symmetrisch ist; und die Formel σ_3, dass R transitiv ist.

(a) Hier soll R symmetrisch und transitiv sein, aber nicht reflexiv. Das tut zum Beispiel jede Menge mit einem Element $M_1 := \{a\}$ mit der Relation $R = \varnothing$. Dann gelten σ_2 und σ_3, weil die Voraussetzung xRy nie erfüllt ist, und $x = a$ ist ein Gegenbeispiel zu σ_1.

(b) Hier soll R reflexiv und transitiv sein, aber nicht symmetrisch. Das tut zum Beispiel die Ordnungsrelation $R :=$„$\leqslant$“ auf $M_2 := \mathbb{R}$.

(c) Hier soll R reflexiv und symmetrisch sein, aber nicht transitiv. Das tut zum Beispiel die Menge $M_3 := \{1, 2, 3\}$ mit der Relation $R := M_3 \times M_3 \smallsetminus \{(1,3),(3,1)\}$, denn darin gilt $1R2$ und $2R3$, aber nicht $1R3$.

3. Eine $\mathscr{L}$-Theorie T heisst *vollständig*, falls für jeden $\mathscr{L}$-Satz σ die Aussage $(T \vdash \sigma) \vee (T \vdash \neg\sigma)$ gilt.

   (a) Sei T eine $\mathscr{L}$-Theorie, welche ein Modell besitzt. Beweise, dass es eine vollständige Theorie $\overline{T}$ gibt, so dass die Inklusion $T \subseteq \overline{T}$ gilt.

   (b) Sei T eine $\mathscr{L}$-Theorie, welche ein eindeutiges Modell besitzt. Beweise, dass die Theorie T vollständig ist.

   (c) Konstruieren Sie eine nicht vollständige Theorie.

   Lösung:

   (a) Sei $\mathbf{M}$ ein Modell für T und betrachte die Theorie

   $$\overline{T} = \{\sigma \ \mathscr{L}\text{-Satz} : \mathbf{M} \models \sigma\}.$$

   Nach dem Korrektheitssatz gilt $T \subset \overline{T}$. Die Theorie $\overline{T}$ ist vollständig, also folgt auch die Aufgabe (b).

   (b) Sei $\mathbf{M}$ das eindeutige Modell von T. Die Theorie T ist konsistent, weil ein Modell für die Theorie existiert. Nach Gödel's Vollständigkeitssatz gilt für jeden $\mathscr{L}$-Satz σ

   $$T \vdash \sigma \iff \mathbf{M} \models \sigma.$$

   Die Theorie der rechten Seite dieser Äquivalenz vollständig, also ist auch die Theorie T vollständig.

   (c) Sei R eine 2-stellige Relation und definiere die Sprache $\mathscr{L} = \{R\}$. Sei T die $\mathscr{L}$-Theorie, welche nur aus den grundlegenden Axiomen besteht. Sei σ_1 der Satz aus Aufgabe 2. In Aufgabe 2 wurden Modelle konstruiert, welche σ_1 erfüllen und nicht erfüllen. Der Korrektheitssatz besagt nun, dass die Theorie T nicht vollständig sein kann.

4. Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur und Φ eine Menge von $\mathscr{L}$-Formeln. Mit der Kardinalität eines Modells von Φ meinen wir die Kardinalität der unterliegenden Menge. Insbesondere nennen wir ein Modell endlich, wenn die unterliegende Menge endlich ist.

   (a) Zeige, dass Φ genau dann konsistent ist, wenn jede endliche Teilmenge davon konsistent ist.

   (b) Zeige: Besitzt Φ endliche Modelle beliebig grosser Kardinalität, so besitzt es auch ein nicht endliches Modell.

   (c) Sei $\mathscr{L}$ die leere Signatur. Da diese keine Funktions- oder Relationssymbole enthält, ist eine $\mathscr{L}$-Struktur einfach eine nichtleere Menge. Zeige, dass es kein Φ gibt, dessen Modelle genau die endlichen Mengen sind.

   Lösung:

   (a) Nach Definition ist Φ genau dann inkonsistent, wenn es eine Formel σ gibt und einen Beweis für $\Phi \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$. Ein solcher Beweis ist eine endliche Folge von Formeln und enthält daher nur endlich viele Axiome in Φ. Jeder solche Beweis ist daher auch ein Beweis für $\Psi \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$ für eine geeignete endliche Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$, und dann ist auch Ψ inkonsistent. Umgekehrt ist jeder Beweis für $\Psi \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$ auch einer für $\Phi \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$. Insgesamt zeigt dies, dass Φ genau dann inkonsistent ist, wenn eine endliche Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$ existiert, die inkonsistent ist. Die kontrapositive Aussage dazu ist damit auch gezeigt.

   (b) Für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ betrachte die Formel

   $$\varphi_n \ :=\ \exists x_1 \ldots \exists x_n\colon (x_1 \neq x_2 \ \wedge\ x_1 \neq x_3 \ \wedge\ \ldots\ \wedge x_{n-1} \neq x_n),$$

   wobei die Aufzählung die endlich vielen Ungleichungen $x_i \neq x_j$ enthält für alle $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Wenn Φ ein endliches Modell der Kardinalität $\geqslant n$ besitzt, so gelten in diesem Modell die Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Somit ist es ein Modell von $\Phi \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, und daher ist dieses Axiomensystem konsistent. Nach (a) ist daher auch $\Phi \cup \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ konsistent. Nach dem Gödelschen Vollständigkeitssatz besitzt diese Theorie also ein Modell. Für jedes $n \geqslant 1$ gilt darin nun aber die Formel φ_n, und deshalb muss dieses Modell mindestens n Elemente besitzen. Da n beliebig ist, muss das Modell daher unendlich sein.

   (c) Nach Annahme besitzt ein solches Φ endliche Modelle beliebig grosser Kardinalität. Nach (b) besitzt es also auch ein nicht endliches Modell existiert. Dies ist jedoch ein Widerspruch.

5. Seien $\mathscr{L} = \{0, s, +, \cdot\}$ die Signatur und **PA** das Axiomensystem der Peano-Arithmetik gemäss Kapitel 1 des Halbeisen-Skripts. Wir nehmen an, dass die natürlichen Zahlen wirklich existieren und **PA** folglich konsistent ist.

Sei nun $\mathscr{L}_* := \mathscr{L} \cup \{c\}$ die um ein neues Konstantensymbol c erweiterte Signatur. Für jede natürliche Zahl n betrachte die $\mathscr{L}_*$-Formel

$$\varphi_n \;:=\; \neg(c = s \ldots s0),$$

wobei das Symbol s auf der rechten Seite genau n-mal vorkommt.

(a) Zeige, dass das Axiomensystem $\mathbf{PA}_n := \mathbf{PA} \cup \{\varphi_i \mid 0 \leqslant i < n\}$ konsistent ist.

(b) Folgere, dass das Axiomensystem $\mathbf{PA}_* := \mathbf{PA} \cup \{\varphi_i \mid i \geqslant 0\}$ konsistent ist.

(c) Schliesse daraus, dass es ein Modell von $\mathbf{PA}$ gibt, welches Elemente ausserhalb der natürlichen Zahlen besitzt.

Lösung:

(a) Sei $\mathbb{N}$ das Standardmodell von $\mathbf{PA}$ und erweitere es zu einer $\mathscr{L}_*$-Struktur $\mathbb{N}_n$ durch die Zuordnung $c \mapsto n$. Für jede natürliche Zahl $0 \leqslant i < n$ gilt dann $i \neq n$ und damit $\mathbb{N}_n \models \varphi_i$. Somit ist $\mathbb{N}_n$ ein Modell von $\mathbf{PA}_n$. Also ist diese Theorie konsistent.

(b) Jede endliche Teilmenge von $\mathbf{PA}_*$ ist in einem $\mathbf{PA}_n$ enthalten, und nach (a) ist diese konsistent. Nach der vorhergehenden Aufgabe ist daher auch $\mathbf{PA}_*$ konsistent.

(c) Nach Gödels Vollständigkeitssatz hat jede konsistente Theorie ein Modell. Nach (b) existiert also ein Modell M_* von $\mathbf{PA}_*$. Der Wert von c darin repräsentiert aber kein Element von $\mathbb{N}$. Wenn wir den Wert von c vergessen, liefert dies ein Modell M von $\mathbf{PA}$, welches echt grösser als $\mathbb{N}$ ist.