Serie 3

Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Betrachte Mengen x und y.

   (a) Beweise, dass eine Menge z existiert mit der Eigenschaft $z \notin x$.

   (b) Beweise, dass $\mathcal{P}(x) \not\subseteq x$ gilt.

   (c) Beweise, dass die symmetrische Differenz eine Menge ist:
   $$x \triangle y \ := \ \{z : (z \in x \vee z \in y) \wedge z \notin x \cap y\}.$$

   (d) Zeige, dass die folgenden Mengen existieren:
   $$\begin{array}{ll} \{z \cap y : z \in x\} & \qquad \{z \smallsetminus y : z \in x\} \\ \{z \cup y : z \in x\} & \qquad \{y \smallsetminus z : z \in x\} \end{array}$$
   Benutze dabei teils das Ersetzungsaxiom und teils nicht.

   (e) Sei $\Gamma \subseteq x \times y$ der Graph einer Funktion $f \colon x \to y$. Zeige, dass das Bild $\{f(a) \mid a \in x\}$ von f eine Menge ist.

   (f) Sei R eine Äquivalenzrelation auf x. Zeige, dass es eine Menge gibt, deren Elemente genau die Äquivalenzklassen von R sind.

2. Schreibe die folgenden Formeln wie angegeben um.

   (a) Eliminiere das Operationssymbol $\mathcal{P}$ für die Potenzmenge und das Prädikatsymbol $\subseteq$ aus dem Ausdruck $\forall x \forall y : (x \subseteq y \longrightarrow \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(y))$.

   (b) Charakterisiere die Gleichung $x \cap y = z$ durch ein dreistelliges Prädikat und formuliere das Assoziativgesetz $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$ damit um.

   (c) Verwandle $\forall x \colon (\{z \in x : z \notin z\} \notin x)$ in eine Formel ohne Mengenklammern.

   (d) Bringe die Definition von ω auf die Form $x = \omega \longleftrightarrow \varphi(x)$ für eine Formel φ.

3. Entscheide mit vollständigem Beweis, ob es die folgenden Mengen gibt:

   (a) Eine Menge M, deren Elemente genau die Mengen mit einem Element sind.

   (b) Für eine beliebige Menge X die Menge aller endlichen Teilmengen von X.

4. (a) Beweise, dass die Mengen $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots$ paarweise verschieden sind.

   (b) Man ersetze das Paarmengenaxiom durch die Forderung

$$\forall x \exists y : z \in y \longleftrightarrow z = x$$

   Zeige, dass diese Forderung zusammen mit dem Axiom der leeren Menge, dem Extensionalitätsaxiom und dem Aussonderungsaxiom in einem Modell erfüllt werden kann, welches nur aus den Mengen $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots$ besteht mit der Einschränkung der normalen Relation $\in$.