D-MATH
Prof. Richard Pink

Grundstrukturen

FS 2023

Musterlösung Serie 3

Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Betrachte Mengen x und y.

   (a) Beweise, dass eine Menge z existiert mit der Eigenschaft $z \notin x$.

   (b) Beweise, dass $\mathcal{P}(x) \not\subseteq x$ gilt.

   (c) Beweise, dass die symmetrische Differenz eine Menge ist:

   $$x \triangle y \;:=\; \{z : (z \in x \vee z \in y) \wedge z \notin x \cap y\}.$$

   (d) Zeige, dass die folgenden Mengen existieren:

   $$\begin{array}{ll} \{z \cap y : z \in x\} & \{z \smallsetminus y : z \in x\} \\ \{z \cup y : z \in x\} & \{y \smallsetminus z : z \in x\} \end{array}$$

   Benutze dabei teils das Ersetzungsaxiom und teils nicht.

   (e) Sei $\Gamma \subseteq x \times y$ der Graph einer Funktion $f \colon x \to y$. Zeige, dass das Bild $\{f(a) \mid a \in x\}$ von f eine Menge ist.

   (f) Sei R eine Äquivalenzrelation auf x. Zeige, dass es eine Menge gibt, deren Elemente genau die Äquivalenzklassen von R sind.

   Lösung:

   (a) In der Vorlesung wurde besprochen, dass das Fundierungsaxiom $x \notin x$ impliziert. Also ist $z := x$ eine Menge mit der gesuchten Eigenschaft.

   (b) Die Menge x ist eine Teilmenge von x; also gilt $x \in \mathcal{P}(x)$. Aus $\mathcal{P}(x) \subseteq x$ folgt daher $x \in x$, was wie oben dem Fundierungsaxiom widerspricht.

   (c) Nach dem Paarmengenaxiom existiert die Menge $\{x, y\}$, also existiert nach dem Vereinigunsaxiom die Menge $x \cup y$. Die symmetrische Differenz kann nun geschrieben werden als

   $$x \triangle y = \{z \in x \cup y : z \notin x \vee z \notin y\}.$$

   Nach dem Aussonderungsaxiom ist dies eine Menge.

(d) *Lösung mit dem Ersetzungsaxiom:* Für beliebige z und w gilt

$$\begin{aligned}
w = z \cap y &\iff \forall t\colon t \in w \longleftrightarrow t \in z \wedge t \in y,\\
w = z \cup y &\iff \forall t\colon t \in w \longleftrightarrow t \in z \vee t \in y,\\
w = z \smallsetminus y &\iff \forall t\colon t \in w \longleftrightarrow t \in z \wedge \neg(t \in y),\\
w = y \smallsetminus z &\iff \forall t\colon t \in w \longleftrightarrow \neg(t \in z) \wedge t \in y.
\end{aligned}$$

In jedem dieser Fälle ist die rechte Seite $\varphi(y, z, w)$ eine Formel, für die nach dem Extensionalitätsaxiom gilt

$$\forall y\, \forall z\, \exists! w\colon \varphi(y, z, w).$$

Somit definiert φ eine Klassenfunktion $F(y, z)$. Die fragliche Menge ist also charakterisiert als $\{F(y, z) \mid z \in x\}$ und existiert nach dem Ersetzungsaxiom.

Lösung ohne Ersetzungsaxiom: Die fraglichen Mengen $z \cap y$ und $z \cup y$ und $z \smallsetminus y$ und $y \smallsetminus z$ sind Teilmengen von $z \cup y$, und wegen $z \in x$ damit auch Teilmengen von $(\bigcup x) \cup y$. Daher können wir die gesuchten Menge charakterisieren durch

$$\Big\{w \in \mathcal{P}\big((\bigcup x) \cup y\big) \;\Big|\; \exists z \in x\colon \varphi(y, z, w)\Big\}.$$

Ihre Existenz folgt somit aus dem Aussonderungsaxiom.

(e) Wir können die gesuchte Menge beschreiben durch die Formel

$$\{b \in y \mid \exists\, a \in x\colon \langle a, b\rangle \in T\},$$

also existiert sie nach dem Aussonderungsaxiom.

(f) Eine Teilmenge $y \subseteq x$ ist genau dann eine Äquivalenzklasse von R, wenn

$$\varphi(y, x, R) \;:=\; (y \neq \varnothing) \wedge (\forall\, a, b \in y\colon aRb)$$

gilt. Somit ist die Menge aller Äquivalenzklassen beschrieben durch

$$\{y \in \mathcal{P}(x) \mid \varphi(y, x, R)\}.$$

2. Schreibe die folgenden Formeln wie angegeben um.

   (a) Eliminiere das Operationssymbol $\mathcal{P}$ für die Potenzmenge und das Prädikatsymbol $\subseteq$ aus dem Ausdruck $\forall x \forall y : (x \subseteq y \longrightarrow \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(y))$.

   (b) Charakterisiere die Gleichung $x \cap y = z$ durch ein dreistelliges Prädikat und formuliere das Assoziativgesetz $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$ damit um.

   (c) Verwandle $\forall x \colon (\{z \in x : z \notin z\} \notin x)$ in eine Formel ohne Mengenklammern.

   (d) Bringe die Definition von ω auf die Form $x = \omega \longleftrightarrow \varphi(x)$ für eine Formel φ.

Lösung:

(a) Die Formel $x \subseteq y$ wurde definiert als Abkürzung für $\forall z \colon (z \in x \longrightarrow z \in y)$, und die Potenzmenge ist charakterisiert durch $\forall w \colon (w \in \mathcal{P}(x) \longleftrightarrow w \subseteq x)$. Setzt man diese Umformungen in den obigen Ausdruck ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \forall x\, \forall y \colon\ & (\forall z \colon (z \in x \longrightarrow z \in y)) \longrightarrow \\ & (\forall z \colon (\forall w \colon w \in z \longrightarrow w \in x) \longrightarrow (\forall w \colon w \in z \longrightarrow w \in y)). \end{aligned}$$

(b) Die Gleichung $x \cap y = z$ ist äquivalent zu der Formel

$$\varphi(x, y, z) \ := \ \forall w \colon (w \in x \wedge w \in y) \longleftrightarrow (w \in z).$$

Die Formel $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$ ist daher äquivalent zu

$$\begin{aligned} \forall u\, \forall v\, \forall s \colon\ & (\varphi(x, y, u) \wedge \varphi(u, z, v) \wedge \varphi(y, z, r) \longrightarrow \varphi(x, r, v)) \qquad \text{oder} \\ \forall u\, \forall v\, \forall s\, \forall t \colon\ & (\varphi(x, y, u) \wedge \varphi(u, z, v) \wedge \varphi(y, z, r) \wedge \varphi(x, r, s) \longrightarrow v = s) \end{aligned}$$

(c) Für jede Menge y ist die Gleichung $y = \{z \in x : z \notin z\}$ äquivalent zu

$$\forall z \colon (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin z)).$$

Also lautet die fragliche Formel übersetzt

$$\forall x\, \forall y \colon (\forall z \colon (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin z))) \longrightarrow y \notin x.$$

(d) Die Menge ω war definiert als kleinste induktive Menge mit dem Element $\varnothing$. Eine beliebige Menge x ist induktiv mit dem Element $\varnothing$, falls gilt

$$\varphi_0(x) \ := \ (\varnothing \in x) \wedge (\forall y \colon (y \in x \longrightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

Somit ist ω eindeutig charakterisiert durch die Bedingung

$$\forall x \colon x = \omega \longleftrightarrow \varphi_0(x) \wedge \forall z : (\varphi_0(z) \longrightarrow \omega \subseteq z).$$

3. Entscheide mit vollständigem Beweis, ob es die folgenden Mengen gibt:

   (a) Eine Menge M, deren Elemente genau die Mengen mit einem Element sind.

   (b) Für eine beliebige Menge X die Menge aller endlichen Teilmengen von X.

   Lösung:

   (a) *Direkter Beweis mittels der Axiome:* Nehmen wir an, die fragliche Menge M existiert. Für jede Menge X ist dann $\{X\}$ eine Menge nach dem Paarmengenaxiom, und da diese genau ein Element besitzt, gilt $\{X\} \in M$. Nach dem Vereinigungsaxiom ist X daher ein Element der Menge $\bigcup M = \bigcup_{Y \in M} Y$. Somit ist $\bigcup M$ eine Menge, die jede Menge als Element enthält. Insbesondere ist sie selbst Element von sich, was aber dem Fundierungsaxiom widerspricht. Somit existiert M nicht.

   Aliter durch Variation des Russellschen Paradoxons: Nehmen wir an, die fragliche Menge M existiert. Nach dem Aussonderungsaxiom existiert dann auch die Menge

   $$N \;:=\; \big\{ X {\in} M \;\big|\; \forall\, Y {\in} X \colon X \notin Y \big\}.$$

   Nach dem Paarmengenaxiom existiert nun die Menge $\{N\}$ und ist damit ein Element von M. Aus der Konstruktion von N folgt daher

   $$\{N\} \in N \;\Longleftrightarrow\; \forall\, Y {\in} \{N\} \colon \{N\} \notin Y \;\Longleftrightarrow\; \{N\} \notin N.$$

   Damit haben wir einen Widerspruch; also existiert M nicht.

   (b) In der Vorlesung wurde besprochen, dass die Menge $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ existiert. Sodann ist eine Menge Y genau dann endlich, wenn ein $n \in \omega$ und eine surjektive Abbildung $f \colon n \twoheadrightarrow Y$ existiert. Eine Abbildung $f \colon n \to Y$ anzugeben ist äquivalent dazu, ihren Graphen anzugeben, das heisst, eine Teilmenge $G \subseteq n \times Y$ mit der Eigenschaft

   $$\varphi(G, n, Y) \;:=\; \big(\forall\, i \in n \; \exists!\, y \in Y \colon \langle i, y \rangle \in G \big).$$

   Weiter ist diese Abbildung genau dann surjektiv, wenn

   $$\psi(G, n, Y) \;:=\; \big(\forall\, y \in Y \; \exists\, i \in n \colon \langle i, y \rangle \in G \big)$$

   gilt. Ausserdem existiert zu jeder Menge die Potenzmenge. Die gesuchte Menge können wir also mit dem Aussonderungsaxiom charakterisieren durch

   $$\big\{ Y \in \mathcal{P}(X) \;\big|\; \exists\, n \in \omega \,\exists\, G \in \mathcal{P}(n \times Y) \colon \varphi(G, n, Y) \wedge \psi(G, n, Y) \big\}.$$

4. (a) Beweise, dass die Mengen $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots$ paarweise verschieden sind.

(b) Man ersetze das Paarmengenaxiom durch die Forderung

$$\forall x \exists y : z \in y \longleftrightarrow z = x$$

Zeige, dass diese Forderung zusammen mit dem Axiom der leeren Menge, dem Extensionalitätsaxiom und dem Aussonderungsaxiom in einem Modell erfüllt werden kann, welches nur aus den Mengen $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots$ besteht mit der Einschränkung der normalen Relation $\in$.

Lösung:

(a) Für natürliche Zahlen $n < m$ sei x die genannte Menge mit n Klammerpaaren und y diejenige mit m Klammerpaaren. Betrachte die Aussage

$$\varphi_n(z) \ := \ \exists x_0 \ldots \exists x_n : (x_0 \in x_1) \wedge \ldots \wedge (x_{n-1} \in x_n) \wedge (x_n \in z).$$

Dann gilt $\varphi_n(y)$ aber nicht $\varphi_n(x)$. Somit ist $y \neq x$.

(b) Nach Konstruktion gilt das Axiom der leeren Menge sowie das abgeschwächte Paarmengenaxiom. Sodann zeigt (a), dass auch das Extensionalitätsaxiom erfüllt ist. Weiter ist das Aussonderungsaxiom erfüllt, weil jede Teilmenge einer solchen Menge wieder eine solche Menge ist.