D-MATH
Prof. Richard Pink

Grundstrukturen

FS 2023

Serie 4

Klassenfunktionen, Ordnungsrelationen

1. Seien F und G durch Formeln φ bzw. ψ definierte einstellige Klassenfunktionen.

   (a) Konstruiere eine Formel, die die Klassenfunktion $X \mapsto G(F(X))$ induziert.

   (b) Sei χ eine weitere Formel mit einer freien Variablen. Beweise, dass eine Klassenfunktion H existiert, so dass für jede Menge X gilt

   $$H(X) = \begin{cases} F(X) & \text{falls } \chi(X), \\ G(X) & \text{falls } \neg\chi(X). \end{cases}$$

   (c) Zeige, dass keine Klassenfunktion H existiert, so dass für alle X gilt

   $$H(X) = \{z : \forall x \ (x \in X \longrightarrow z \in x)\}.$$

2. In der Vorlesung wurden die Begriffe der Partialordnung und der Totalordnung im Sinne von $\leqslant$ definiert. Formuliere äquivalente Axiome für die zugehörigen strikten Ordnungen im Sinne von $<$ und beweise die Äquivalenz.

3. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Seien $(X_1, \leqslant_1)$ und $(X_2, \leqslant_2)$ zwei total geordnete Mengen. Definiere die lexikographische Ordnung $\leqslant$ auf $X_1 \times X_2$ für alle Elemente $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ und $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ durch

   $$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \ :\Longleftrightarrow \ (x_1 \neq y_1 \wedge x_1 \leqslant_1 y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leqslant_2 y_2).$$

   Beweise, dass die lexikographische Ordnung eine totale Ordnung definiert.