Musterlösung Serie 4

Klassenfunktionen, Ordnungsrelationen

1. Seien F und G durch Formeln φ bzw. ψ definierte einstellige Klassenfunktionen.

   (a) Konstruiere eine Formel, die die Klassenfunktion $X \mapsto G(F(X))$ induziert.

   (b) Sei χ eine weitere Formel mit einer freien Variablen. Beweise, dass eine Klassenfunktion H existiert, so dass für jede Menge X gilt

   $$H(X) = \begin{cases} F(X) & \text{falls } \chi(X), \\ G(X) & \text{falls } \neg\chi(X). \end{cases}$$

   (c) Zeige, dass keine Klassenfunktion H existiert, so dass für alle X gilt

   $$H(X) = \{z : \forall x \ (x \in X \longrightarrow z \in x)\}.$$

Lösung: Nach Voraussetzung existieren Beweise für die Aussagen $\forall x \, \exists! y \colon \varphi(x,y)$ und $\forall x \, \exists! y \colon \psi(x,y)$, und für alle X gilt $\varphi(X, F(X))$ und $\psi(X, G(X))$.

(a) Für alle X und Z gilt

$$\begin{aligned} Z = G(F(X)) \iff & \exists Y \colon Y = F(X) \wedge Z = G(Y) \\ \iff & \exists Y \colon \varphi(X,Y) \wedge \psi(Y,Z). \end{aligned}$$

Daher hat die Formel

$$\omega(x,z) \ := \big(\exists y \colon \varphi(x,y) \wedge \psi(y,z)\big)$$

die gesuchte Eigenschaft. Ausserdem liefern die Beweise von $\forall x \, \exists! y \colon \varphi(x,y)$ und $\forall x \, \exists! y \colon \psi(x,y)$ einen Beweis für $\forall x \, \exists! z \colon \omega(x,z)$.

(b) Für alle X und Y soll gelten

$$\begin{aligned} Y = H(X) \iff & \big(Y = F(X) \wedge \chi(X)\big) \vee \big(Y = G(X) \wedge \neg\chi(X)\big) \\ \iff & \big(\varphi(X,Y) \wedge \chi(X)\big) \vee \big(\psi(X,Y) \wedge \neg\chi(X)\big). \end{aligned}$$

Daher hat die Formel

$$\omega(x,y) \ := \big(\varphi(x,y) \wedge \chi(x)\big) \vee \big(\psi(x,y) \wedge \neg\chi(x)\big)$$

die gesuchte Eigenschaft. Durch Fallunterscheidung liefern ausserdem die Beweise von $\forall x \, \exists! y \colon \varphi(x,y)$ und $\forall x \, \exists! y \colon \psi(x,y)$ einen Beweis für $\forall x \, \exists! z \colon \omega(x,z)$.

(c) Ist X die leere Menge, so ist die Bedingung $\forall x\ (x \in X \longrightarrow z \in x)$ für alle Mengen z erfüllt. Dann wäre also $H(\varnothing)$ die Menge aller Mengen, die jedoch nicht existieren kann.

2. *Zur gegenseitigen Korrektur:* In der Vorlesung wurden die Begriffe der Partialordnung und der Totalordnung im Sinne von $\leqslant$ definiert. Formuliere äquivalente Axiome für die zugehörigen strikten Ordnungen im Sinne von $<$ und beweise die Äquivalenz.

   Lösung: Wir betrachten die folgenden Axiome für $<$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in X\colon &\quad \neg(x < x) && \text{(nicht reflexiv)}\\
\forall x, y, z \in X\colon &\quad x < y \wedge y < z \;\longrightarrow\; x < z && \text{(transitiv)}\\
\forall x, y \in X\colon &\quad x < y \ \vee\ x = y \ \vee\ y < x && \text{(total)}
\end{aligned}$$

   Wir nennen $<$ eine strikte Partialordnung, wenn die ersten beiden gelten, und eine strikte Totalordnung, wenn alle gelten.

   Zu jeder Partial- oder Totalordnung $\leqslant$ auf X assoziieren wir die Relation

$$x < y \;:\Longleftrightarrow\; (x \neq y) \wedge (x \leqslant y). \tag{1}$$

   Nach Konstruktion ist diese nicht reflexiv. Sodann nehmen wir $x < y < z$ an. Nach (1) gilt dann $x \leqslant y \leqslant z$ und wegen der Transitivität von $\leqslant$ auch $x \leqslant z$. Wäre nun $x = z$, so wäre schon $x = y$ wegen der Antisymmetrie von $\leqslant$, was aber der Voraussetzung $x < y$ widerspricht. Somit ist $<$ transitiv und daher eine strikte Partialordnung.

   Sei schliesslich $\leqslant$ eine Totalordnung. Für alle $x, y \in X$ gilt dann $x \leqslant y$ oder $y \leqslant x$. Aus (1) folgt dann direkt $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$. Also ist $<$ total im Sinne des obigen Axioms und daher eine strikte Totalordnung.

   Sei nun umgekehrt $<$ eine strikte Partial- oder Totalordnung auf X. Dann definieren wir die Relation

$$x \leqslant y \;:\Longleftrightarrow\; (x = y) \vee (x < y). \tag{2}$$

   Nach Konstruktion ist diese reflexiv. Aus der Transitivität von $<$ folgt durch Fallunterscheidung schnell die Transitivität von $\leqslant$. Sei jetzt weiter $x \leqslant y$ und $y \leqslant x$. Wäre dann $x \neq y$, so wäre wegen (2) auch $x < y$ und $y < x$ und wegen der Transitivität von $<$ auch $x < x$, im Widerspruch zum ersten Axiom oben. Also ist $\leqslant$ antisymmetrisch und daher insgesamt eine Partialordnung.

   Sei schliesslich $<$ eine strikte Totalordnung. Für alle $x, y \in X$ folgt dann aus (2) und dem letzten Axiom oben $x \leqslant y$ oder $y \leqslant x$. Somit ist $\leqslant$ eine Totalordnung.

   Endlich bleibt noch zu zeigen, dass die Konstruktionen (1) und (2) zueinander invers sind. Dies folgt aber direkt daraus, dass $\leqslant$ reflexiv und $<$ nicht reflexiv ist.

3. Seien $(X_1, \leqslant_1)$ und $(X_2, \leqslant_2)$ zwei total geordnete Mengen. Definiere die lexikographische Ordnung $\leqslant$ auf $X_1 \times X_2$ für alle Elemente $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ und $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ durch

$$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \;:\Longleftrightarrow\; (x_1 \neq y_1 \wedge x_1 \leqslant_1 y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leqslant_2 y_2).$$

Beweise, dass die lexikographische Ordnung eine totale Ordnung definiert.

Lösung: Reflexivität: Sei $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, dann gilt $x_1 \leqslant_1 x_1$ weil $\leqslant_1$ reflexiv ist, also gilt auch $(x_1, x_2) \leqslant (x_1, x_2)$.

Antisymmetrie: Seien $(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \leqslant (x_1, x_2)$. Nehmen wir zuerst $x_1 \neq y_1$ an. Dann folgt aufgrund der Definition der lexikographischen Ordnung $x_1 \leqslant_1 y_1$ und $y_1 \leqslant_1 x_1$, und mit der Antisymmetrie von $\leqslant_1$ folgt die Gleichheit $x_1 = y_1$. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, also gilt in jedem Fall $x_1 = y_1$. Aufgrund der Definition der lexikographischen Ordnung folgt dann $x_2 \leqslant_2 y_2$ und $y_2 \leqslant_2 x_2$, und mit der Antisymmetrie von $\leqslant_2$ folgt $x_2 = y_2$.

Transitivität: Seien $(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \leqslant (z_1, z_2)$. Hier gibt es vier Fälle zu unterscheiden, von denen wir nur einen ausarbeiten: Seien $x_1 = y_1$ und $y_1 \neq z_1$. Nach der Definition von $(y_1, y_2) \leqslant (z_1, z_2)$ gilt dann $y_1 \leqslant_1 z_1$, also gilt $x_1 \neq z_1$ und $x_1 \leqslant_1 z_1$, woraus $(x_1, x_2) \leqslant (z_1, z_2)$ folgt.

Totalität: Betrachte $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ und $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$. Hier gibt es zwei Fälle zu unterscheiden; wir beschränken uns auf den Fall $x_1 = y_1$. Dann gilt die Aussage $x_2 \leqslant_2 y_2$ oder die Aussage $y_2 \leqslant_2 x_2$, weil die Ordnung $\leqslant_2$ total ist. Dementsprechend folgt $(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2)$ oder $(y_1, y_2) \leqslant (x_1, x_2)$.