Serie 5

Rekursion und natürliche Zahlen

Die Peano-Axiome in der Signatur $\{0, S, +, \cdot\}$ lauten:

PA$_1$: $\forall x\colon Sx \neq 0$

PA$_2$: $\forall x, y\colon (Sx = Sy \longrightarrow x = y)$

PA$_3$: $\varphi(0) \wedge \big(\forall x\colon (\varphi(x) \longrightarrow \varphi(Sx))\big) \longrightarrow \forall x\colon \varphi(x)$
für jede Formel φ mit freier Variable x

PA$_4$: $\forall x\colon x + 0 = x$

PA$_5$: $\forall x\, \forall y\colon x + Sy = S(x + y)$

PA$_6$: $\forall x\colon x \cdot 0 = 0$

PA$_7$: $\forall x\, \forall y\colon x \cdot Sy = x \cdot y + x$

In Aufgaben 1 und 2 sollen nur diese verwendet werden. Aufgaben 3 und 4 behandeln die Realisierung der Menge ω der natürlichen Zahlen innerhalb der Mengenlehre.

1. Betrachte die natürlichen Zahlen

$$2 := SS0 \quad \text{und} \quad 4 := SSSS0 \quad \text{und} \quad 8 := SSSSSSSS0.$$

Beweise nur unter Verwendung der Axiome und ohne Induktion die Gleichungen

$$2 + 2 = 4 \quad \text{und} \quad 4 \cdot 2 = 8.$$

2. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Wir nehmen an, dass die Kommutativität und Assoziativität der Addition von natürlichen Zahlen schon bewiesen ist mittels der Peano-Axiome und zeigen die Kommutativität der Multiplikation. Beweise dafür:

   (a) Für alle x und y gilt $x + Sy = y + Sx$.

   (b) Für alle x gilt $0 \cdot x = 0$.

   (c) Für alle x gilt $\forall y\colon Sy \cdot x = y \cdot x + x$.

   (d) Für alle x gilt $\forall y\colon y \cdot x = x \cdot y$.

3. (a) Beweise $\forall x \in \omega\colon x \notin x$ mit Induktion anstelle des Fundierungsaxioms.

   (b) Zeige, dass keine Funktion $f\colon \omega \to \omega$ existiert mit $\forall x \in \omega\colon f(Sx) \in f(x)$.

   (c) Erkläre die Bedeutung der Aussage (b) in Worten.

4. Für jede Menge X definieren wir rekursiv $\mathcal{P}^0(X) := X$ und $\mathcal{P}^{Sn}(X) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(X))$ für alle $n \in \omega$. Beweise, dass die Vereinigung

$$\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}^n(X)$$

eine Menge ist.