Musterlösung Serie 5

Rekursion und natürliche Zahlen

Die Peano-Axiome in der Signatur $\{0, S, +, \cdot\}$ lauten:

$\mathbf{PA}_1$: $\forall x\colon Sx \neq 0$

$\mathbf{PA}_2$: $\forall x, y\colon (Sx = Sy \longrightarrow x = y)$

$\mathbf{PA}_3$: $\varphi(0) \wedge \big(\forall x\colon (\varphi(x) \longrightarrow \varphi(Sx))\big) \longrightarrow \forall x\colon \varphi(x)$
für jede Formel φ mit freier Variable x

$\mathbf{PA}_4$: $\forall x\colon x + 0 = x$

$\mathbf{PA}_5$: $\forall x \forall y\colon x + Sy = S(x+y)$

$\mathbf{PA}_6$: $\forall x\colon x \cdot 0 = 0$

$\mathbf{PA}_7$: $\forall x \forall y\colon x \cdot Sy = x \cdot y + x$

In Aufgaben 1 und 2 sollen nur diese verwendet werden. Aufgaben 3 und 4 behandeln die Realisierung der Menge ω der natürlichen Zahlen innerhalb der Mengenlehre.

1. Betrachte die natürlichen Zahlen

$$2 := SS0 \quad \text{und} \quad 4 := SSSS0 \quad \text{und} \quad 8 := SSSSSSSS0.$$

Beweise nur unter Verwendung der Axiome und ohne Induktion die Gleichungen

$$2 + 2 = 4 \quad \text{und} \quad 4 \cdot 2 = 8.$$

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned} 2+2 &= SS0 + SS0 \overset{\mathrm{PA}_5}{=} S(SS0 + S0) \overset{\mathrm{PA}_5}{=} SS(SS0+0) \overset{\mathrm{PA}_4}{=} SS(SS0) = 4, \\ 4 \cdot 2 &= 4 \cdot SS0 \overset{\mathrm{PA}_7}{=} 4 \cdot S0 + 4 \overset{\mathrm{PA}_7}{=} (4 \cdot 0 + 4) + 4 \overset{\mathrm{PA}_6}{=} (0+4)+4. \end{aligned}$$

Sodann zeigen wir für jede natürliche Zahl x

$$\begin{aligned} x + 4 &= x + SSSS0 \overset{\mathrm{PA}_5}{=} S(x + SSS0) \overset{\mathrm{PA}_5}{=} SS(x + SS0) \\ &\overset{\mathrm{PA}_5}{=} SSS(x + S0) \overset{\mathrm{PA}_5}{=} SSSS(x+0) \overset{\mathrm{PA}_4}{=} SSSSx. \end{aligned}$$

Durch Anwenden auf die Fälle $x = 0$ und $x = 4$ folgt daraus

$$4 \cdot 2 = (0+4)+4 = SSSS0 + 4 = SSSSSSSS0 = 8.$$

2. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Wir nehmen an, dass die Kommutativität und Assoziativität der Addition von natürlichen Zahlen schon bewiesen ist mittels der Peano-Axiome und zeigen die Kommutativität der Multiplikation. Beweise dafür:

   (a) Für alle x und y gilt $x + Sy = y + Sx$.

   (b) Für alle x gilt $0 \cdot x = 0$.

   (c) Für alle x gilt $\forall y\colon Sy \cdot x = y \cdot x + x$.

   (d) Für alle x gilt $\forall y\colon y \cdot x = x \cdot y$.

   Lösung:

   (a) Mit der Kommutativität der Addition folgt

   $$x + Sy \overset{\mathrm{PA}_5}{=} S(x+y) = S(y+x) \overset{\mathrm{PA}_5}{=} y + Sx.$$

   (b) Wir beweisen die Aussage $\varphi(x) :\equiv (0 \cdot x = 0)$ durch Induktion über x. Nach **PA**$_6$ gilt $0 \cdot 0 = 0$ und somit $\varphi(0)$. Gilt $\varphi(x)$, so folgt

   $$0 \cdot Sx \overset{\mathrm{PA}_7}{=} 0 \cdot x + 0 \overset{\varphi(x)}{=} 0 + 0 \overset{\mathrm{PA}_6}{=} 0$$

   und damit $\varphi(Sx)$. Also gilt $\varphi(x)$ für alle x.

   (c) Wir beweisen die Aussage $\psi(x) :\equiv (\forall y\colon Sy \cdot x = y \cdot x + x)$ durch Induktion über x. Für alle y haben wir

   $$Sy \cdot 0 \overset{\mathrm{PA}_6}{=} 0 \overset{\mathrm{PA}_4}{=} 0 + 0 \overset{\mathrm{PA}_6}{=} y \cdot 0 + 0,$$

   somit gilt $\psi(0)$. Nun betrachte ein x, für das $\psi(x)$ gilt. Für alle y gilt dann

   $$\begin{aligned} Sy \cdot Sx &\overset{\mathrm{PA}_7}{=} Sy \cdot x + Sy \\ &\overset{\psi(x)}{=} (y \cdot x + x) + Sy \\ &\overset{\text{Assoz}}{=} y \cdot x + (x + Sy) \\ &\overset{\text{(a)}}{=} y \cdot x + (y + Sx) \\ &\overset{\text{Assoz}}{=} (y \cdot x + y) + Sx \\ &\overset{\mathrm{PA}_7}{=} y \cdot Sx + Sx. \end{aligned}$$

   Somit folgt $\varphi(Sx)$. Nach Induktion gilt daher $\psi(x)$ für alle x.

   (d) Wir beweisen die Aussage $\omega(x) :\equiv (\forall y\colon y \cdot x = x \cdot y)$ durch Induktion über x. Für alle y gilt nach (b)

   $$0 \cdot y \overset{\text{(b)}}{=} 0 \overset{\mathrm{PA}_6}{=} y \cdot 0,$$

   somit gilt $\omega(0)$. Betrachte nun ein x, so dass $\omega(x)$ gilt. Dann gilt für alle y

   $$\begin{aligned} y \cdot Sx &\overset{\mathrm{PA}_7}{=} y \cdot x + y \\ &\overset{\omega(x)}{=} x \cdot y + y \\ &\overset{\text{(c)}}{=} Sx \cdot y. \end{aligned}$$

3. (a) Beweise $\forall x \in \omega\colon x \notin x$ mit Induktion anstelle des Fundierungsaxioms.
   (b) Zeige, dass keine Funktion $f\colon \omega \to \omega$ existiert mit $\forall x \in \omega\colon f(Sx) \in f(x)$.
   (c) Erkläre die Bedeutung der Aussage (b) in Worten.

   Lösung:

   (a) Für $x = \varnothing$ folgt die Aussage aus der Definition der leeren Menge. Sei jetzt $x \in \omega$ gegeben, so dass $x \notin x$ gilt. Nehmen wir an, es gilt $Sx \in Sx$. Dann ist $Sx \in Sx = x \cup \{x\}$ und folglich gilt $Sx \in x$ oder $Sx = x$. Nun wurde in der Vorlesung, ohne Verwendung der zu beweisenden Aussage, gezeigt, dass

   $$\forall x \in \omega\ \forall y \in x\colon y \subseteq x$$

   gilt. Im Fall $Sx \in x$ folgt also $Sx \subseteq x$, und deshalb gilt in beiden Fällen $Sx \subseteq x$. Wegen $Sx = x \cup \{x\}$ impliziert dies aber $x \in x$, im Widerspruch zur Wahl von x. Somit folgt $Sx \notin Sx$. Durch Induktion zeigt dies die Aussage $x \notin x$ für alle $x \in \omega$.

   (b) Für jede solche Funktion $f : \omega \to \omega$ betrachten wir die Bildmenge

   $$\mathrm{Bild}(f) \ := \ \{f(x) : x \in \omega\}.$$

   Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Relation $\in$ eine strikte Wohlordnung auf ω induziert. Als nichtleere Teilmenge besitzt $\mathrm{Bild}(f)$ daher ein kleinstes Element y. Nach Konstruktion ist dann $y = f(x)$ für ein $x \in \omega$. Für dieses gilt aber nach Annahme $f(Sx) \in f(x)$. Somit ist $f(Sx)$ ein echt kleineres Element von $\mathrm{Bild}(f)$ und wir haben einen Widerspruch. Daher kann eine solche Funktion nicht existieren.

   (c) Für alle $x, y \in \omega$ gilt $Sx = x + 1$ und $x < y \Leftrightarrow x \in y$. Also ist $f(Sx) \in f(x)$ äquivalent zu $f(x+1) < f(x)$. Somit besagt (b), dass keine strikt monoton fallende Funktion von der Menge der natürlichen Zahlen in sich existiert.

4. Für jede Menge X definieren wir rekursiv $\mathcal{P}^0(X) := X$ und $\mathcal{P}^{Sn}(X) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(X))$ für alle $n \in \omega$. Beweise, dass die Vereinigung

$$\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}^n(X)$$

eine Menge ist.

Lösung: Wir müssen eine Funktion f auf ω konstruieren mit $f(n) = \mathcal{P}^n(X)$ für alle $n \in \omega$. Sobald wir diese haben, ist ihr Bild

$$\mathrm{Bild}(f) = \{P^n(X) : n \in \omega\}$$

eine Menge. Die Vereinigung der Elemente von $\mathrm{Bild}(f)$ ist nach dem Vereingungsaxiom eine Menge mit der gesuchten Beschreibung.

Zur Konstruktion von f beachten wir, dass die Eigenschaft einer Menge g, eine Funktion — das heisst der Graph einer Funktion — zu sein, bereits durch eine Formel beschrieben werden kann. Ausserdem ist dann der Definitionsbereich $\mathrm{Def}(g)$ durch eine Formel beschrieben, genauso wie die Potenzmenge $\mathcal{P}(y)$ einer Menge y. Somit können wir die folgenden Formeln betrachten:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(n,g,z) &:\equiv (n = 0 \wedge z = X)\\
\psi(n,g) &:\equiv \big(n \in \omega \wedge \exists m \in \omega\colon (Sm = n) \wedge g \text{ Funktion} \wedge m \in \mathrm{Def}(g)\big)\\
\varphi_2(n,g,z) &:\equiv \big(\psi(n,g) \wedge (\forall m \in \omega\colon (Sm = n \longrightarrow z = \mathcal{P}(g(m))))\big)\\
\varphi_3(n,g,z) &:\equiv \big((n \notin \omega \vee \neg\psi(n,g)) \wedge z = \varnothing\big)\\
\varphi(n,g,z) &:\equiv \varphi_1(n,g,z) \vee \varphi_2(n,g,z) \vee \varphi_3(x,y,z).
\end{aligned}$$

Für jedes Paar (n,g) gilt dann genau einer der Fälle $n = 0$ oder $\psi(n,g)$ oder $n \notin \omega \vee \neg\psi(n,g)$, und in jedem dieser Fälle ist durch die entsprechende Formel $\varphi_i(n,g,z)$ eine eindeutige Menge z charakterisiert. Somit gilt $\forall n\, \forall g\, \exists! z\colon \varphi(n,g,z)$, also definiert φ eine zweistellige Klassenfunktion F. Nach dem Rekursionstheorem existiert also eine eindeutige Funktion f mit Definitionsbereich ω und

$$\forall n \in \omega\colon f(n) = F(n, f|\omega_{<n}).$$

Nach der Definition von φ_1 gilt dann $f(0) = X$, und nach der Definition von φ_2 gilt $f(Sm) = \mathcal{P}(m)$ für alle $m \in \omega$. Dies entspricht genau der rekursiven Definition von $\mathcal{P}^n(X)$; somit ist $f(n) = \mathcal{P}^n(X)$ für alle $n \in \omega$, wie gewünscht.