Serie 6

Auswahlaxiom, Zornsches Lemma, Rekursion

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Ein *Schnitt* einer Funktion $f\colon X \to Y$ ist eine Funktion $s\colon Y \to X$ mit der Eigenschaft $f(s(y)) = y$ für alle $y \in Y$. Beweise, dass das Auswahlaxiom äquivalent dazu ist, dass für jede surjektive Funktion ein Schnitt existiert.

2. Beweise direkt, dass das Wohlordnungsprinzip das Auswahlaxiom impliziert.

3. Sei $\leqslant$ eine Partialordnung auf einer Menge A. Wir sagen, dass eine weitere Partialordnung $\preceq$ auf A die Partialordnung $\leqslant$ *verfeinert*, falls gilt:

$$\forall a, b \in A\colon a \leqslant b \longrightarrow a \preceq b.$$

Falls sie dazu noch verschieden von $\leqslant$ ist, so sagen wir, dass sie $\leqslant$ *echt verfeinert*.

   (a) Seien $x, y \in A$ mit $y \nleqslant x$ und $x \nleqslant y$. Zeige, dass

$$a \preceq b \;:\equiv\; a \leqslant b \vee (a \leqslant x \wedge y \leqslant b)$$

   eine Partialordnung auf A definiert, welche $\leqslant$ echt verfeinert.

   (b) Beweise mit dem Zornschen Lemma, dass jede Partialordnung auf einer Menge A zu einer Totalordnung auf A verfeinert werden kann.

4. Zur Erinnerung: Jede natürliche Zahl n ist die Menge aller natürlichen Zahlen $m < n$, und das kartesische Produkt A^n ist die Menge aller Funktionen $n \to A$.

   (a) Gegeben sei eine Funktion $F\colon \bigcup_{n\in\omega} \{n\} \times A^n \to A$. Beweise, dass eine eindeutige Funktion $f\colon \omega \to A$ existiert, so dass die Rekursionsgleichung $f(n) = F(n, f|_{\omega_{<n}})$ für alle $n \in \omega$ gilt.
   Hinweis: Erweitere F zu einer Klassenfunktion.

   (b) Beweise, dass eine eindeutige Funktion $f\colon \omega \to \omega$ existiert, so dass die Gleichungen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ und $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ für alle $n \in \omega$ gelten. Die Funktion f ergibt die sogenannten Fibonacci-Zahlen.

   (c) Sei $G\colon \omega \times A \to A$ eine Funktion und $a_0 \in A$ ein Element. Beweise, dass eine eindeutige Funktion $f\colon \omega \to A$ existiert, so dass die Rekursionslgeichungen $f(0) = a_0$ und $f(n+1) = F(n, f(n))$ für alle $n \in \omega$ gelten.

   (d) Beweise, dass eine eindeutige Funktion $f\colon \omega \to \omega$ existiert, so dass $f(0) = 1$ und $f(n+1) = (n+1)f(n)$ für alle $n \in \omega$ gilt. Die Funktion f wird die Fakultät genannt.