Musterlösung Serie 6

Auswahlaxiom, Zornsches Lemma, Rekursion

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Ein *Schnitt* einer Funktion $f\colon X \to Y$ ist eine Funktion $s\colon Y \to X$ mit der Eigenschaft $f(s(y)) = y$ für alle $y \in Y$. Beweise, dass das Auswahlaxiom äquivalent dazu ist, dass für jede surjektive Funktion ein Schnitt existiert.

   Lösung: Wir müssen zwei Richtungen beweisen. Nehmen wir zuerst an, dass das Auswahlaxiom gilt. Sei $f\colon X \to Y$ eine surjektive Funktion. Für jedes $y \in Y$ definieren wir die Menge $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Betrachte die Menge

   $$F \;:=\; \big\{ f^{-1}(y) \times \{y\} \,\big|\, y \in Y \big\} \;\subseteq\; \mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \times Y).$$

   Da f surjektiv ist, sind alle Elemente von F nichtleere Mengen. Nach dem Auswahlaxiom existiert also eine Funktion $g\colon F \to \bigcup F$ mit $g(z) \in z$ für alle $z \in F$. Für alle $y \in Y$ bedeutet dies $g(f^{-1}(y) \times \{y\}) \in f^{-1}(y) \times \{y\}$, mit anderen Worten also $g(f^{-1}(y) \times \{y\}) = \langle s(y), y\rangle$ für ein eindeutiges $s(y) \in f^{-1}(y)$. Dies definiert eine Funktion $s\colon Y \to X$, nämlich diejenige mit dem Graphen

   $$\big\{ \langle y, x\rangle \in Y \times X \,\big|\, \exists z \in F\colon g(z) = \langle x, y\rangle \big\}.$$

   Nach Konstruktion erfüllt diese $f(s(y)) = y$ für alle $y \in Y$ und ist daher ein Schnitt von f.

   Wir beweisen nun die Umkehrung. Sei F eine Menge, so dass jedes Element von F eine nichtleere Menge ist. Betrachte die Menge

   $$G \;:=\; \big\{ \langle x, y\rangle \in \bigcup F \times F \,\big|\, x \in y \big\} \;\subseteq\; \bigcup F \times F.$$

   Die Projektion auf die zweite Koordinate ergibt eine Funktion $f\colon G \to F$. Diese Funktion ist surjektiv, weil die Elemente von F nichtleere Mengen sind. Also besitzt sie nach unserer Annahme einen Schnitt $s\colon F \to G$. Wir definieren eine Funktion $h\colon F \to \bigcup F$, indem wir jedes Element $y \in F$ auf die erste Koordinate von $s(y)$ abbilden. Für jedes $y \in F$ haben wir dann $s(y) = \langle h(y), y\rangle$, und nach der Konstruktion von G gilt daher $h(y) \in F$. Die Funktion h genügt damit den Forderungen des Auwahlaxioms für die Menge F.

2. Beweise direkt, dass das Wohlordnungsprinzip das Auswahlaxiom impliziert.

   Lösung: Sei F eine Menge, so dass jedes $x \in F$ nichtleer ist. Wähle eine Wohlordnung $\preceq$ auf der Menge $\bigcup F$. Jedes $x \in F$ ist dann eine nichtleere Teilmenge von $\bigcup F$ und besitzt daher ein eindeutiges bezüglich $\preceq$ kleinstes Element $f(x)$. Dies definiert eine Funktion f mit dem Graphen

$$\Big\{\langle x, y\rangle \in F \times \bigcup F \;\Big|\; y \in x \wedge \forall z \in x \colon y \preceq z\Big\},$$

   denn dieser ist eine Teilmenge der Menge $F \times \bigcup F$ nach dem Aussonderungsaxiom. Diese Funktion f hat die gesuchte Eigenschaft des Auswahlaxioms.

3. Sei $\leqslant$ eine Partialordnung auf einer Menge A. Wir sagen, dass eine weitere Partialordnung $\preceq$ auf A die Partialordnung $\leqslant$ *verfeinert*, falls gilt:

$$\forall a, b \in A \colon a \leqslant b \longrightarrow a \preceq b.$$

   Falls sie dazu noch verschieden von $\leqslant$ ist, so sagen wir, dass sie $\leqslant$ *echt verfeinert*.

   (a) Seien $x, y \in A$ mit $y \nleqslant x$ und $x \nleqslant y$. Zeige, dass

$$a \preceq b \;:\equiv\; a \leqslant b \vee (a \leqslant x \wedge y \leqslant b)$$

   eine Partialordnung auf A definiert, welche $\leqslant$ echt verfeinert.

   (b) Beweise mit dem Zornschen Lemma, dass jede Partialordnung auf einer Menge A zu einer Totalordnung auf A verfeinert werden kann.

   Lösung:

   (a) Wir müssen die drei Axiome einer Partialordnung verifizieren.

   Reflexivität: Für jedes $a \in A$ gilt $a \leqslant a$, also auch $a \preceq a$. Somit ist $\preceq$ reflexiv.

   Antiymmetrie: Betrachte $a, b \in A$ mit $a \preceq b$ und $b \preceq a$. Wir müssen vier Fälle unterscheiden:

   - Im Fall $a \leqslant b$ und $b \leqslant a$ folgt aus der Antisymmetrie von $\leqslant$ die Gleichung $a = b$.
   - Im Fall $a \leqslant b$ und $b \leqslant x$ und $y \leqslant a$ folgt aus der Transitivität von $\leqslant$ die Relation $y \leqslant x$. Dies widerspricht unserer Annahme $y \nleqslant x$, also kann dieser Fall nicht auftreten.
   - Im Fall $a \leqslant x$ und $y \leqslant b$ und $b \leqslant a$ erhalten wir analog zum vorhergehenden Fall einen Widerspruch zu $y \nleqslant x$.
   - Im Fall $a \leqslant x$ und $y \leqslant b$ und $b \leqslant x$ und $y \leqslant a$ folgt aus der Transitivität von $\leqslant$ die Relation $y \leqslant x$, also kann auch dieser Fall nicht auftreten.

   Transitivität: Betrachte $a, b, c \in A$ mit $a \preceq b$ und $b \preceq c$. Wiederum müssen wir vier Fälle unterscheiden:

- Im Fall $a \leqslant b$ und $b \leqslant c$ folgt $a \leqslant c$ aus der Transitivität von $\leqslant$ und damit auch $a \preceq c$.
- Im Fall $a \leqslant b$ und $b \leqslant x$ und $y \leqslant c$ folgt aus der Transitivität von $\leqslant$ die Relation $a \leqslant x$. Wegen $a \leqslant x$ und $y \leqslant c$ gilt dann $a \preceq c$.
- Im Fall $a \leqslant x$ und $y \leqslant b$ und $b \leqslant c$ folgt aus der Transitivität von $\leqslant$ die Relation $y \leqslant c$ und damit ebenfalls $a \preceq c$.
- Im Fall $a \leqslant x$ und $y \leqslant b$ und $b \leqslant x$ und $y \leqslant c$ gilt direkt $a \leqslant x$ und $y \leqslant c$ und damit $a \preceq c$.

Somit ist $\preceq$ eine Partialordnung auf A. Nach Konstruktion ist sie eine Verfeinerung von $\leqslant$. Schliesslich gilt $x \leqslant x$ und $y \leqslant y$ und daher $x \preceq y$. Wegen $x \nleqslant y$ ist $\preceq$ also eine echte Verfeinerung von $\leqslant$.

(b) Sei $S \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ die Menge aller Partialordnungen auf A, welche $\leqslant$ verfeinern. Diese Menge ist nichtleer, weil sie die Partialordnung $\leqslant$ enthält. Sie ist ausserdem partialgeordnet durch die Inklusion $\subseteq$.

Behauptung: Jede Kette $K \subseteq S$ besitzt eine obere Schranke in S.

Beweis: Im Fall $K = \varnothing$ ist $\leqslant$ eine obere Schranke. Andernfalls setzen wir $\tilde{R} := \bigcup K$. Nach Konstruktion ist dann $\tilde{R} \subseteq A \times A$. Da jedes $R \in K$ die Relation $\leqslant$ verfeinert, tut dies auch die Relation $\tilde{R}$. Insbesondere ist R reflexiv.

Sodann betrachte $a, b \in A$ mit $\langle a, b\rangle \in \tilde{R}$ und $\langle b, a\rangle \in \tilde{R}$. Nach der Konstruktion von $\tilde{R}$ existieren dann $R, R' \in K$ mit $\langle a, b\rangle \in R$ und $\langle b, a\rangle \in R'$. Da K eine Kette ist, gilt nun $R \subseteq R'$ oder $R' \subseteq R$. Im ersten Fall liegen $\langle a, b\rangle$ und $\langle b, a\rangle$ beide in R', und nach der Antisymmetrie von R' folgt daraus $a = b$. Im zweiten Fall folgt das Gleiche mit R anstelle von R'. Somit ist die Relation $\tilde{R}$ antisymmetrisch.

Weiter betrachte $a, b, c \in X$ mit $\langle a, b\rangle \in \tilde{R}$ und $\langle b, c\rangle \in \tilde{R}$. Dann existieren $R, R' \in K$ mit $\langle a, b\rangle \in R$ und $\langle b, c\rangle \in R'$. Wieder gilt dann $R \subseteq R'$ oder $R' \subseteq R$, also enthält eines von R und R' beide Paare $\langle a, b\rangle$ und $\langle b, c\rangle$. Aus der Transitivität der betreffenden Relation folgt dann $\langle a, c\rangle \in \tilde{R}$. Somit ist $\tilde{R}$ transitiv.

Damit ist R eine Partialordnung auf A, welche $\leqslant$ verfeinert, und ist somit ein Element von S. Wegen $R = \bigcup K$ ist sie eine obere Schranke von K. $\square$

Nach dem Zornschen Lemma besitzt S nun ein maximales Element $\preceq$. Ist dieses keine Totalordnung auf A, so existieren $x, y \in X$ mit $y \not\preceq x$ und $x \not\preceq y$. Nach Teilaufgabe (a) existiert dann aber eine Partialordnung auf A, welche $\preceq$ echt verfeinert. Dies widerspricht der Maximalität von $\preceq$; somit ist $\preceq$ eine Totalordnung auf A, die $\leqslant$ verfeinert.

4. Zur Erinnerung: Jede natürliche Zahl n ist die Menge aller natürlichen Zahlen $m < n$, und das kartesische Produkt A^n ist die Menge aller Funktionen $n \to A$.

   (a) Gegeben sei eine Funktion $F\colon \bigcup_{n\in\omega}\{n\} \times A^n \to A$. Beweise, dass eine eindeutige Funktion $f\colon \omega \to A$ existiert, so dass die Rekursionsgleichung $f(n) = F(n, f|_{\omega<n})$ für alle $n \in \omega$ gilt.

   Hinweis: Erweitere F zu einer Klassenfunktion.

   (b) Beweise, dass eine eindeutige Funktion $f\colon \omega \to \omega$ existiert, so dass die Gleichungen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ und $f(n+2) = f(n+1)+f(n)$ für alle $n \in \omega$ gelten. Die Funktion f ergibt die sogenannten Fibonacci-Zahlen.

   (c) Sei $G\colon \omega \times A \to A$ eine Funktion und $a_0 \in A$ ein Element. Beweise, dass eine eindeutige Funktion $f\colon \omega \to A$ existiert, so dass die Rekursionslgeichungen $f(0) = a_0$ und $f(n+1) = F(n, f(n))$ für alle $n \in \omega$ gelten.

   (d) Beweise, dass eine eindeutige Funktion $f\colon \omega \to \omega$ existiert, so dass $f(0) = 1$ und $f(n+1) = (n+1)f(n)$ für alle $n \in \omega$ gilt. Die Funktion f wird die Fakultät genannt.

Lösung:

(a) Wir setzen $X := \bigcup_{n\in\omega}\{n\} \times A^n$ und erweitern $F\colon X \to A$ zu einer Klassenfunktion $\tilde{F}$ durch

$$\tilde{F}(n,f) \;:=\; \begin{cases} F(n,f) & \text{falls } \langle n,f\rangle \in X, \\ \varnothing & \text{sonst.} \end{cases}$$

Genauer ist diese durch die folgende Formel definiert:

$$\varphi(n,f,y) \;:\equiv\; \big(\langle n,f\rangle \in X \wedge y = F(n,f)\big) \vee \big(\langle n,f\rangle \notin X \wedge y = \varnothing\big).$$

Nach dem Rekursionstheorem, angewendet auf die Klassenfunktion $\tilde{F}$ und die Menge ω, existiert nun eine eindeutige Funktion f, welche für alle $n \in \omega$ die Rekursionsgleichung $f(n) = \tilde{F}(n, f|_{\omega<n})$ erfüllt. Weil F und $\tilde{F}$ auf der Menge X übereinstimmen, erfüllt f die gewünschte Rekursionsgleichung.

Schliesslich müssen wir noch zeigen, dass $f(n) \in A$ ist für alle $n \in \omega$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein kleinstes Gegenbeispiel $n \in \omega$ mit $f(n) \notin A$. Für alle $m < n$ wäre dann $f(m) \in A$ und folglich auch $f(n) = F(n, f|_{\omega<n}) \in A$. Damit haben wir einen Widerspruch; somit gilt die gewünschte Aussage für alle $n \in \omega$.

(b) Betrachte die Funktion $F\colon \bigcup_{n\in\omega}\{n\} \times \omega^n \to \omega$ mit

$$F(n,g) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ 1 & \text{falls } n = 1, \\ g(m+1) + g(m) & \text{falls } n = m+2 \text{ für } m \in \omega. \end{cases}$$

Das Rekursionstheorem aus Teilaufgabe (a) liefert eine eindeutige Funktion $f : \omega \to \omega$, welche die gesuchten Rekursionsgleichungen erfüllt.

(c) Wir definieren eine Funktion $F\colon \bigcup_{n\in\omega}\{n\} \times A^n \to A$ durch

$$F(n,g) \ := \begin{cases} a_0 & \text{falls } n = 0, \\ G(m, g(m)) & \text{falls } n = m+1 \text{ für } m \in \omega. \end{cases}$$

Teilaufgabe (a) liefert nun eine eindeutige Funktion $f\colon \omega \to A$, welche die Rekursionsgleichungen $f(0) = F(0, \varnothing) = a_0$ und

$$f(m+1) \ = \ F(m+1, f|\omega_{<m+1}) \ = \ G(m, f(m))$$

für alle $n \in \omega$ erfüllt.

(d) Wir setzen $a_0 := 1$ und betrachten die Funktion

$$G\colon \omega \times \omega \to \omega,\ (n,m) \mapsto G(n,m) := (n+1)m.$$

Nach Teilaufgabe (c) existiert also eine eindeutige Funktion $f\colon \omega \to \omega$ mit $f(0) = 1$ und $f(n+1) = (n+1)f(n)$ für alle $n \in \omega$.