Serie 7

Endliche & Unendliche Mengen

Erinnerung: Eine Menge X heisst *endlich*, falls ein $n \in \omega$ und eine Bijektion $n \xrightarrow{\sim} X$ existiert. In diesem Fall ist n eindeutig bestimmt und heisst die *Kardinalität* $|X|$ von X. Summe und Produkt von natürlichen Zahlen sind durch die Peano-Axiome definiert.

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Beweise, ohne das Auswahlaxiom zu verwenden, dass für jede endliche Menge, deren Elemente nichtleere Mengen sind, eine Funktion $\varphi\colon X \to \bigcup X$ mit $\varphi(x) \in x$ für alle $x \in X$ existiert.

2. Wir betrachten zwei endliche Mengen X und Y.

   (a) Beweise $|X| = |X \setminus \{x\}| + 1$ für jedes $x \in X$.

   (b) Beweise $|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$.

   (c) Folgere $|X \cup Y| \leqslant |X| + |Y|$, mit Gleichheit falls X und Y disjunkt sind.

   (d) Beweise $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

   (e) Beweise $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

   (f) Berechne die Kardinalität von 5×3 und $\mathcal{P}(3)$.

3. Zeige: Für jede natürliche Zahl n und beliebige Mengen $x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$|\{x_1, \ldots, x_n\}| \leqslant n.$$

4. In der Vorlesung wurde bzw. wird gezeigt: Für jede Menge x sind äquivalent:

   (a) Es existiert kein $n \in \omega$ mit einer Bijektion $n \xrightarrow{\sim} x$.

   (b) Es existiert kein $n \in \omega$ mit einer Injektion $x \hookrightarrow n$.

   (c) Für alle $n \in \omega$ gilt $n \prec x$.

   (d) Es existiert eine injektive Funktion $\omega \hookrightarrow x$.

   (e) Es existiert eine injektive aber nicht bijektive Funktion $x \hookrightarrow x$.

   Zeige, dass diese Bedingungen auch äquivalent sind zu:

   (f) Es existiert kein $n \in \omega$ mit einer Surjektion $n \twoheadrightarrow x$.

   (g) Es existiert eine surjektive Funktion $x \twoheadrightarrow \omega$.

   (h) Es existiert eine surjektive aber nicht bijektive Funktion $x \twoheadrightarrow x$.