# Musterlösung Serie 7

## Endliche & Unendliche Mengen

**Erinnerung:** Eine Menge $X$ heisst *endlich*, falls ein $n \in \omega$ und eine Bijektion $n \xrightarrow{\sim} X$ existiert. In diesem Fall ist $n$ eindeutig bestimmt und heisst die *Kardinalität* $|X|$ von $X$. Summe und Produkt von natürlichen Zahlen sind durch die Peano-Axiome definiert.

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Beweise, ohne das Auswahlaxiom zu verwenden, dass für jede endliche Menge, deren Elemente nichtleere Mengen sind, eine Funktion $\varphi\colon X \to \bigcup X$ mit $\varphi(x) \in x$ für alle $x \in X$ existiert.

   *Lösung:* Da $X$ endlich ist, existiert ein $n \in \omega$ und eine Bijektion $f\colon n \to X$. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über dieses $n$.

   Ist $n = 0$, so ist $n = \varnothing$ und daher auch $X = \varnothing$. Dann existiert genau eine Funktion $\varphi\colon X = \varnothing \to \varnothing = \bigcup X$, und diese hat automatisch die Eigenschaft $\varphi(x) \in x$ für alle $x \in X$, weil es keine solche $x$ gibt.

   Für den Induktionsschritt nehmen wir an, die Aussage gilt für $n$. Sei $X$ eine Menge von nichtleeren Mengen mit einer Bijektion $f\colon n+1 \to X$. Wegen $n+1 = n \cup \{n\}$ und $n \notin n$ induziert $f$ dann eine Bijektion $f'\colon n \to X' := X \smallsetminus \{f(n)\}$. Nach der Induktionsvoraussetzung existiert also eine Funktion $\varphi'\colon X' \to \bigcup X'$ mit $\varphi'(x) \in x$ für alle $x \in X'$. Ausserdem ist $f(n) \in X$ nach Annahme eine nichtleere Menge; daher existiert ein $y \in f(n)$. Somit können wir $\varphi'$ zu einer Funktion $\varphi\colon X \to \bigcup X$ fortsetzen durch $\varphi(f(n)) := y$. Diese Funktion erfüllt wieder $\varphi(x) \in x$ für alle $x \in X$. Somit gilt die gesuchte Aussage für $n+1$ anstelle von $n$.

   Durch Induktion folgt die Aussage nun für alle $n$, also für alle endlichen Mengen $X$ von nichtleeren Mengen.

2. Wir betrachten zwei endliche Mengen $X$ und $Y$.

   (a) Beweise $|X| = |X \smallsetminus \{x\}| + 1$ für jedes $x \in X$.

   (b) Beweise $|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$.

   (c) Folgere $|X \cup Y| \leqslant |X| + |Y|$, mit Gleichheit falls $X$ und $Y$ disjunkt sind.

   (d) Beweise $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

   (e) Beweise $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

   (f) Berechne die Kardinalität von $5 \times 3$ und $\mathcal{P}(3)$.

   *Lösung:*

(a) Nach Voraussetzung existiert ein $n \in \omega$ und eine Bijektion $f\colon n \xrightarrow{\sim} X$. Sodann existiert ein eindeutiges $m \in n$ mit $f(m) = x$. Insbesondere ist $n > 0$ und daher $n = Sn'$ für ein $n' \in \omega$. Sei nun $\sigma\colon n \xrightarrow{\sim} n$ diejenige Bijektion, welche $m$ mit $n'$ vertauscht und alle anderen Elemente von $n$ festlässt. Dann ist $g := f \circ \sigma\colon n \xrightarrow{\sim} X$ eine Bijektion mit $g(n') = x$. Wegen $n = Sn' = n' \cup \{n'\}$ und $n' \notin n'$ induziert diese also eine Bijektion $n' \xrightarrow{\sim} X \setminus \{x\}$. Somit ist $|X \setminus \{x\}| = n'$ und folglich $|X| = n = Sn' = n' + 1 = |X \setminus \{x\}| + 1$.

(b) Wir zeigen dies durch Induktion über $|Y|$.

Ist $|Y| = 0$, so ist $Y = \varnothing = X \cap Y$ und $X \cup Y = X$ und folglich

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| \;=\; |X| + |\varnothing| \;=\; |X| + |Y|,$$

wie gewünscht.

Nun betrachten wir ein $n \in \omega$ und nehmen an, die gewünschte Aussage gelte im Fall $|Y| = n$. Sei jetzt $Y$ eine endliche Menge mit $|Y| = n + 1$. Dann ist $Y$ nichtleer und enthält somit ein Element $y$. Für $Y' := Y \setminus \{y\}$ gilt dann $n + 1 = |Y| = |Y'| + 1$ nach (a) und folglich $|Y'| = n$. Nach der Induktionsannahme gilt daher

$$|X \cup Y'| + |X \cap Y'| \;=\; |X| + |Y'|.$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle: Ist $y \in X$, so ist $X \cup Y = X \cup Y'$ und $y \in X \cap Y$ und $(X \cap Y) \setminus \{y\} = X \cap Y'$. Nach (a) gilt also $|X \cap Y| = |X \cap Y'| + 1$ und folglich, unter Verwendung der Assoziativität der Addition:

$$\begin{aligned}
|X \cup Y| + |X \cap Y| &= |X \cup Y'| + \big(|X \cap Y'| + 1\big) \\
&= \big(|X \cup Y'| + |X \cap Y'|\big) + 1 \\
&= \big(|X| + |Y'|\big) + 1 \\
&= |X| + \big(|Y'| + 1\big) \\
&= |X| + |Y|,
\end{aligned}$$

wie gewünscht. Ist dagegen $y \notin X$, so ist $y \in X \cup Y$ und $(X \cup Y) \setminus \{y\} = X \cup Y'$ sowie $X \cap Y = X \cap Y'$. Nach (a) gilt also $|X \cup Y| = |X \cup Y'| + 1$ und folglich, unter Verwendung der Assoziativität und Kommutativität der Addition:

$$\begin{aligned}
|X \cup Y| + |X \cap Y| &= \big(|X \cup Y'| + 1\big) + |X \cap Y'| \\
&= \big(|X \cup Y'| + |X \cap Y'|\big) + 1 \\
&= \big(|X| + |Y'|\big) + 1 \\
&= |X| + \big(|Y'| + 1\big) \\
&= |X| + |Y|,
\end{aligned}$$

wie gewünscht.

Damit sind der Induktionsanfang und der Induktionsschritt gezeigt; die gewünschte Aussage gilt also für beliebiges $|Y|$.

(c) Nach (b) gilt $|X \cup Y| + k = |X| + |Y|$ für $k := |X \cap Y| \in \omega$; also ist $|X \cap Y| \leqslant |X| + |Y|$ nach der Vorlesung vom 28. 3. 2023. Sind zusätzlich $X$ und $Y$ disjunkt, so ist $X \cap Y = \varnothing$ und folglich $|X \cap Y| = 0$, und daher

$$|X \cup Y| \;=\; |X \cup Y| + 0 \;=\; |X \cup Y| + |X \cap Y| \;=\; |X| + |Y|,$$

wie gewünscht.

(d) Wir beweisen die Gleichung $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ durch Induktion über $|Y|$.

Für den Induktionsbeginn betrachten wir $Y = \varnothing$, dann gilt $X \times Y = \varnothing$. Für jedes $n \in \omega$ gilt $n \cdot 0 = 0$, also gilt auch $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Für den Induktionsschritt betrachten wir $n \in \omega$ und $Y$ mit $|Y| = n+1$. Dann ist $Y$ nichtleer, also existiert $y \in Y$. Für $Y' := Y \setminus \{y\}$ gilt dann $|Y'| = n$, und $X \times Y$ ist die disjunkte Vereinigung von $X \times Y'$ und $X \times \{y\}$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt dann einerseits $|X \times Y'| = |X| \cdot |Y'|$, und wegen der Bijektion $X \xrightarrow{\sim} X \times \{y\}$, $x \mapsto \langle x, y \rangle$ gilt andererseits $|X \times \{y\}| = |X|$. Zusammen erhalten wir nun

$$\begin{aligned} |X \times Y| &\overset{(c)}{=} |X \times Y'| + |X \times \{y\}| \\ &\overset{\text{IV}}{=} |X| \cdot |Y'| + |X| \\ &\overset{\text{PA}_7}{=} |X| \cdot (|Y'| + 1) \\ &= |X| \cdot |Y|, \end{aligned}$$

wie gewünscht. Nach Induktion gilt diese Aussage also für beliebiges $|Y|$.

(e) Wir beweisen die Gleichung $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$ durch Induktion über $|X|$. Für den Induktionsbeginn betrachten wir $X = \varnothing$. Dann gilt $|\mathcal{P}(X)| = |\{\varnothing\}| = 1 = 2^0$.

Für den Induktionsschritt betrachten wir $n \in \omega$ und $X$ mit $|X| = n + 1$. Weil $X$ nichtleer ist, existiert $x \in X$, und mit $X' := X \setminus \{x\}$ gilt dann $|X| = |X'| + 1$ nach (a) und folglich $|X'| = n$. Nach der Induktionsannahme gilt daher bereits $|\mathcal{P}(X')| = 2^n$. Ausserdem haben wir eine Bijektion

$$\mathcal{P}(X') \times \{0,1\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(X), \quad (Y, i) \mapsto \begin{cases} Y & \text{falls } i = 0, \\ Y \cup \{x\} & \text{falls } i = 1. \end{cases}$$

Wegen $|\{0,1\}| = |2| = 2$ und (d) sowie der rekursiven Definition von $2^n$ folgt daraus

$$|\mathcal{P}(X)| \;=\; |\mathcal{P}(X') \times \{0,1\}| \;=\; |\mathcal{P}(X')| \cdot |\{0,1\}| \;=\; 2^n \cdot 2 \;=\; 2^{n+1} \;=\; 2^{|X|},$$

wie gewünscht. Nach Induktion gilt diese Aussage also für beliebiges $|X|$.

(f) Nach der Teilaufgabe (d) gilt

$$|5 \times 3| = |5| \cdot |3| = 5 \cdot 3 = 15$$

und nach (e) gilt

$$|\mathcal{P}(3)| = 2^{|3|} = 2^3 = 8.$$

3. Zeige: Für jede natürliche Zahl $n$ und beliebige Mengen $x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$|\{x_1, \ldots, x_n\}| \leqslant n.$$

*Lösung:* Wir beweisen die Ungleichung durch Induktion über $n$. Im Fall $n = 0$ ist die Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ leer und hat Kardinalität $0 \leqslant n$, also gilt die Aussage. Für den Induktionsschritt betrachten wir $n \in \omega$ und Mengen $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Wegen der Bijektion $1 = \{0\} \xrightarrow{\sim} \{x_{n+1}\}$ gilt dann $|\{x_{n+1}\}| = 1$. Mit $X := \{x_1, \ldots, x_n\}$ folgt aus Teilaufgabe 2 (c) dann

$$|\{x_1, \ldots, x_n\}| \;=\; |X \cup \{x_{n+1}\}| \;\leqslant\; |X| + |\{x_{n+1}\}| \;=\; |X| + 1 \;\leqslant\; n + 1.$$

Daher gilt die Aussage für $n + 1$, und durch Induktion folgt sie für alle $n$.

*Aliter:* Die gegebenen Daten bedeuten, dass eine Funktion $f$ mit Definitionsbereich $\{1, \ldots, n\} = Sn \smallsetminus \{0\}$ gegeben ist mit $f(k) = x_k$ für alle $k$. Wir haben also eine Surjektion

$$n \;=\; \{0, \ldots, n-1\} \twoheadrightarrow X := \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad i \mapsto f(i+1).$$

Nach Aufgabe 1 von Serie 6 besitzt diese einen Schnitt $s\colon X \to n$, das heisst, eine Funktion mit $f(s(x)) = x$ für alle $x \in X$. Für alle $x, x' \in X$ mit $s(x) = s(x')$ gilt dann $x = f(s(x)) = f(s(x')) = x'$; somit ist $s$ injektiv. Also induziert $s$ eine Bijektion von $X$ auf die Teilmenge $\mathrm{Bild}(s) \subseteq n$. Ist diese Teilmenge gleich $n$, so sind $s$ und $f$ bereits bijektiv, also gilt $|X| = n$. Andernfalls existiert nach Proposition 2 der Vorlesung vom 4. 4. 2023 ein $m \in \omega$ mit $m < n$ und eine Bijektion $m \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(s)$. Zusammen liefert dies eine Bijektion $m \xrightarrow{\sim} X$, und wir erhalten $|X| = m < n$. Auch in diesem Fall sind wir also fertig.

4. In der Vorlesung wurde bzw. wird gezeigt: Für jede Menge $x$ sind äquivalent:

(a) Es existiert kein $n \in \omega$ mit einer Bijektion $n \xrightarrow{\sim} x$.

(b) Es existiert kein $n \in \omega$ mit einer Injektion $x \hookrightarrow n$.

(c) Für alle $n \in \omega$ gilt $n \prec x$.

(d) Es existiert eine injektive Funktion $\omega \hookrightarrow x$.

(e) Es existiert eine injektive aber nicht bijektive Funktion $x \hookrightarrow x$.

Zeige, dass diese Bedingungen auch äquivalent sind zu:

(f) Es existiert kein $n \in \omega$ mit einer Surjektion $n \twoheadrightarrow x$.

(g) Es existiert eine surjektive Funktion $x \twoheadrightarrow \omega$.

(h) Es existiert eine surjektive aber nicht bijektive Funktion $x \twoheadrightarrow x$.

*Lösung:* Als Vorbereitung beweisen wir:

*Behauptung:* Für je zwei Mengen $X$ und $Y \neq \varnothing$ gilt:

(i) Eine Surjektion $X \twoheadrightarrow Y$ existiert dann und nur dann, wenn eine Injektion $Y \hookrightarrow X$ existiert.

(ii) Eine nicht bijektive Surjektion $X \twoheadrightarrow Y$ existiert dann und nur dann, wenn eine nicht bijektive Injektion $Y \hookrightarrow X$ existiert.

*Beweis:* (i) Betrachte eine Surjektion $f\colon X \twoheadrightarrow Y$. Nach Aufgabe 1 von Serie 6 existiert dann ein Schnitt $s\colon Y \to X$, das heisst, eine Funktion mit $f(s(y)) = y$ für alle $y \in Y$. Für alle $y,\, y' \in Y$ mit $s(y) = s(y')$ gilt dann $y = f(s(y)) = f(s(y')) = y'$; somit ist $s$ injektiv und damit die gesuchte Injektion $Y \hookrightarrow X$.

Betrachte umgekehrt eine Injektion $s\colon Y \hookrightarrow X$. Weil $Y$ nichtleer ist, können wir ein $y_0 \in Y$ wählen. Wir konstruieren eine Funktion $g\colon X \to Y$ durch

$$g(x) \;:=\; \begin{cases} y & \text{falls } y \in Y \text{ existiert mit } s(y) = x, \\ y_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert, weil $s$ injektiv ist. Nach Konstruktion gilt weiter $g(s(y)) = y$ für alle $y \in Y$; somit ist $g$ surjektiv und damit die gesuchte Surjektion $X \twoheadrightarrow Y$.

(ii) Betrachte eine nicht bijektive Surjektion $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ und den oben konstruierten Schnitt $s\colon Y \hookrightarrow X$. Nach Annahme existieren dann $x,\, x' \in X$ mit $x \neq x'$ und $f(x) = f(x')$. Nach etwaigem Vertauschen von $x$ und $x'$ gilt dann $x \neq s(f(x))$. Wäre nun $x \in \mathrm{Bild}(s)$, so hätten wir $x = s(y)$ für ein $y \in Y$, und wegen $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ hätten wir $f(x) = f(s(y)) = y$ und damit $x = s(y) = s(f(x))$, also einen Widerspruch. Somit ist $s$ nicht surjektiv und damit die gesuchte nicht bijektive Injektion $Y \hookrightarrow X$.

Betrachte umgekehrt eine nicht bijektive Injektion $s\colon Y \hookrightarrow X$ und die oben konstruierte Surjektion $g\colon X \twoheadrightarrow Y$. Nach Annahme existiert dann ein $x_0 \in X \smallsetminus \mathrm{Bild}(s)$. Für dieses gilt nach Konstruktion $g(x_0) = y_0$. Ausserdem gilt $g(s(y_0)) = y_0$ und $x_0 \neq s(y_0)$. Somit ist $g$ nicht injektiv und damit die gesuchte nicht bijektive Surjektion $X \twoheadrightarrow Y$. $\square$

Nun zeigen wir die gewünschten Äquivalenzen. Zuerst betrachten wir den Fall $x = \varnothing$. Dann existiert genau eine Funktion $0 = \varnothing \xrightarrow{\sim} \varnothing = x$ und diese ist bijektiv;

also sind (a) und (f) und (h) falsch. Wegen $\omega \neq \varnothing$ ist auch (g) falsch. Somit sind alle diese Aussagen äquivalent im Fall $x = \varnothing$.

Sei nun $x \neq \varnothing$. Die Behauptung (i) im Fall $Y = x$ und $X = n$ zeigt dann die Äquivalenz (f)⇔(b). Die Behauptung (i) im Fall $X = x$ und $Y = \omega$ zeigt die Äquivalenz (g)⇔(d) Schliesslich zeigt die Behauptung (ii) im Fall $X = Y = x$ die Äquivalenz (h)⇔(e).

*Aliter:* Man kann auch direkt die Äquivalenz der zu (a) und (f) kontrapositiven Aussagen zeigen:

(a′) Es existiert ein $m \in \omega$ mit einer Bijektion $m \xrightarrow{\sim} x$.

(f′) Es existiert ein $n \in \omega$ mit einer Surjektion $n \twoheadrightarrow x$.

*Beweis:* Da jede bijektive Funktion surjektiv ist, gilt offenbar (a′)⇒(f′). Für die Umkehrung betrachte ein $n \in \omega$ und eine Surjektion $f \colon n \twoheadrightarrow x$. Nach Aufgabe 1 von Serie 6 existiert dann ein Schnitt $s \colon x \to n$, das heisst, eine Funktion mit $f(s(y)) = y$ für alle $y \in x$. Für alle $y, y' \in x$ mit $s(y) = s(y')$ gilt dann $y = f(s(y)) = f(s(y')) = y'$; somit ist $s$ injektiv. Also induziert $s$ eine Bijektion von $x$ auf die Teilmenge $\mathrm{Bild}(s) \subseteq n$. Ist diese Teilmenge gleich $n$, so sind $s$ und $f$ bereits bijektiv, also gilt die gewünschte Aussage (a′) mit $m = n$. Andernfalls existiert nach Proposition 2 der Vorlesung vom 4. 4. 2023 ein $m \in \omega$ mit $m < n$ und eine Bijektion $m \xrightarrow{\sim} x$. Auch in diesem Fall sind wir also fertig. □