D-MATH
Prof. Richard Pink

Grundstrukturen

FS 2023

Serie 8

Kardinalzahlen, Kardinalzahlarithmetik

Erinnerung: Für zwei Mengen X und Y bezeichnet ${}^XY$ die Menge der Funktionen $X \to Y$.

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Sei X eine unendliche Menge und $\mathrm{Perm}(X)$ die Menge der Bijektionen $X \xrightarrow{\sim} X$. Beweise $|\mathrm{Perm}(X)| = 2^{|X|}$.

2. Seien α, α', β und γ Kardinalzahlen mit $\alpha \leqslant \alpha'$.

   (a) Beweise $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

   (b) Beweise $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

   (c) Beweise $\gamma^\alpha \leqslant \gamma^{\alpha'}$ falls $\gamma \neq 0$.

3. Für jede ganze Zahl $n \geqslant 2$ sei X_n die Menge aller unendlichen Folgen mit Werten in $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, das heisst, die Menge aller Funktionen $\omega \to n$.

   (a) Zeige, dass die Mengen X_n alle dieselbe Kardinalität besitzen.

   (b) Konstruiere eine explizite Bijektion zwischen X_2 und X_3.

   (c) Tue dasselbe für X_m und X_n für beliebige $n \geqslant m \geqslant 2$.

4. Sei V ein unendlichdimensionaler K-Vektorraum. Beweise

$$|V| = \max\{|K|, \dim_K(V)\}.$$

**5. Beweise den *Satz von Hessenberg:* Für jede unendliche Menge x gilt $x \times x \sim x$.