# Musterlösung Serie 8

## Kardinalzahlen, Kardinalzahlarithmetik

**Erinnerung:** Für zwei Mengen $X$ und $Y$ bezeichnet ${}^XY$ die Menge der Funktionen $X \to Y$.

1. *Zur gegenseitigen Korrektur:* Sei $X$ eine unendliche Menge und $\mathrm{Perm}(X)$ die Menge der Bijektionen $X \xrightarrow{\sim} X$. Beweise $|\mathrm{Perm}(X)| = 2^{|X|}$.

   *Lösung:* Weil $X$ unendlich ist, gilt $|X|^{|X|} = 2^{|X|}$ nach einem Resultat aus der Vorlesung vom 18. 4. 23. Weiter gilt $\mathrm{Perm}(X) \subseteq {}^XX$, also folgt $|\mathrm{Perm}(X)| \leqslant 2^{|X|}$.

   Nach einem Resultat der Vorlesung vom 18. 4. 23 gilt $|X| = |X \times 2|$, also existiert eine Bijektion $\varphi\colon X \to X \times \{0,1\}$. Diese induziert zueinander inverse Bijektionen

   $$\begin{aligned} \mathrm{Perm}(X) &\to \mathrm{Perm}(X \times 2), \quad \psi \mapsto \varphi\psi\varphi^{-1}, \\ \mathrm{Perm}(X \times 2) &\to \mathrm{Perm}(X), \quad \psi \mapsto \varphi^{-1}\psi\varphi, \end{aligned}$$

   also gilt $|\mathrm{Perm}(X)| = |\mathrm{Perm}(X \times 2)|$. Für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ betrachte nun die Funktion

   $$\sigma_Y\colon X \times 2 \longrightarrow X \times 2, \quad (x,i) \mapsto \begin{cases} \langle x, i\rangle & \text{falls } x \in Y, \\ \langle x, 1-i\rangle & \text{falls } x \notin Y. \end{cases}$$

   Diese Funktion ist eine Bijektion, weil $\sigma_Y^2$ die Identität ist. Diese Konstruktion ergibt eine injektive Funktion $\mathcal{P}(X) \hookrightarrow \mathrm{Perm}(X \times 2)$, $Y \mapsto \sigma_Y$. Also gilt

   $$2^{|X|} = |\mathcal{P}(X)| \leqslant |\mathrm{Perm}(X \times 2)| = |\mathrm{Perm}(X)|.$$

   Zusammen folgt also $|\mathrm{Perm}(X)| = 2^{|X|}$.

2. Seien $\alpha, \alpha', \beta$ und $\gamma$ Kardinalzahlen mit $\alpha \leqslant \alpha'$.

   (a) Beweise $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

   (b) Beweise $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

   (c) Beweise $\gamma^\alpha \leqslant \gamma^{\alpha'}$ falls $\gamma \neq 0$.

   *Lösung:*

   (a) Wir betrachten die Funktionen

$$
\begin{aligned}
{}^{\gamma}({}^{\beta}\alpha) &\to {}^{\beta \times \gamma}\alpha,\ f \mapsto (\langle x, y\rangle \mapsto (f(x))(y)) \\
{}^{\beta \times \gamma}\alpha &\to {}^{\gamma}({}^{\beta}\alpha),\ f \mapsto (y \mapsto (x \mapsto f(x, y)))
\end{aligned}
$$

   Eine direkte Rechung zeigt, dass diese zueinander invers und daher bijektiv sind. Also gilt

$$
\alpha^{\beta \cdot \gamma} = \alpha^{|\beta \times \gamma|} = |{}^{|\beta \times \gamma|}\alpha| = |{}^{\beta \times \gamma}\alpha| = |{}^{\gamma}({}^{\beta}\alpha)| = |{}^{\beta}\alpha|^{\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma.
$$

   (b) Die Bijektion $\alpha \times \beta \to \beta \times \alpha$, $\langle x, y\rangle \mapsto \langle y, x\rangle$ beweist $\alpha \times \beta \sim \beta \times \alpha$. Also gilt

$$
\alpha \cdot \beta = |\alpha \times \beta| = |\beta \times \alpha| = \beta \times \alpha.
$$

   (c) Nach Annahme existiert eine Injektion $i \colon \alpha \hookrightarrow \alpha'$. Diese induziert eine Funktion

$$
i^* \colon {}^{\alpha'}\gamma \to {}^{\alpha}\gamma,\ f' \mapsto f' \circ i.
$$

   Weil $\gamma$ nichtleer ist, existiert ein Element $z \in \gamma$. Für jede Funktion $f \colon \alpha \to \gamma$ ist dann

$$
f' \colon \alpha' \to \gamma,\ x' \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x' = i(x) \text{ für } x \in \alpha, \\ z & \text{sonst,} \end{cases}
$$

   eine Funktion mit $f' \circ i = f$. Also ist $i^*$ surjektiv. Wegen der Existenz von Schnitten aus Aufgabe 1 in Serie 6 existiert daher eine Injektion ${}^{\alpha}\gamma \hookrightarrow {}^{\alpha'}\gamma$. Nun erhalten wir

$$
\gamma^\alpha = |{}^{\alpha}\gamma| \leqslant |{}^{\alpha'}\gamma| = \gamma^{\alpha'}.
$$

   *Bemerkung:* Die Voraussetzung $\gamma \neq 0$ ist notwendig wegen $0^0 = 1 > 0 = 0^1$.

3. Für jede ganze Zahl $n \geqslant 2$ sei $X_n$ die Menge aller unendlichen Folgen mit Werten in $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, das heisst, die Menge aller Funktionen $\omega \to n$.

   (a) Zeige, dass die Mengen $X_n$ alle dieselbe Kardinalität besitzen.

   (b) Konstruiere eine explizite Bijektion zwischen $X_2$ und $X_3$.

   (c) Tue dasselbe für $X_m$ und $X_n$ für beliebige $n \geqslant m \geqslant 2$.

   *Lösung:*

   (a) Wegen $|n| = n$ ist $|X_n| = |{}^\omega n| = n^\omega$ im Sinne der Kardinalzahlarithmetik. Aus $2 \leqslant n \leqslant 2^n$ folgt daher $|X_2| \leqslant |X_n| \leqslant |X_{2^n}|$. Aus der Vorlesung wissen wir andererseits $n \cdot \omega = \max\{n, \omega\} = \omega$. Mit Grundregeln der Kardinalzahlarithmetik erhalten wir also

   $$|X_{2^n}| = (2^n)^\omega = 2^{n \cdot \omega} = 2^\omega = |X_2|.$$

   Somit folgt $|X_2| \leqslant |X_n| \leqslant |X_2|$ und nach dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein daher $|X_n| = |X_2|$ für alle $n \geqslant 2$.

   (b) Jedem Element $x \in \{0, 1, 2\}$ ordnen wir eine endliche Folge $f(x)$ über dem Alphabet $\{0, 1\}$ zu durch $f(0) := 0$ und $f(1) := 10$ sowie $f(2) := 11$. Einer Folge $\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots) \in X_3$ ordnen wir diejenige Folge in $X_2$ zu, die durch Zusammensetzen der Wörter $f(x_0), f(x_1), \ldots$ entsteht. Wir behaupten, dass dies eine Bijektion $g\colon X_3 \to X_2$ definiert.

   Dafür konstruieren wir eine Funktion in die umgekehrte Richtung. Für jede Folge $\underline{y} = (y_0, y_1, \ldots) \in X_2$ setzen wir zunächst

   $$h_0(\underline{y}) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } y_0 = 0, \\ 1 & \text{falls } y_0 = 1 \text{ und } y_1 = 0, \\ 2 & \text{falls } y_0 = 1 \text{ und } y_1 = 1. \end{cases}$$

   Nach Konstruktion beginnt die Folge $\underline{y}$ mit dem Anfangssegment $f(h_0(\underline{y}))$. Sei $\underline{y}'$ die Folge, die durch Streichen dieses Anfangssegments entsteht. Dann definieren wir rekursiv $h_{i+1}(\underline{y}) := h_i(\underline{y}')$ für alle $i \geqslant 0$ und erhalten insgesamt eine Funktion $h\colon X_2 \to X_3$ durch $h(\underline{y}) := (h_0(\underline{y}), h_1(\underline{y}), \ldots)$.

   Nach Konstruktion ist dann $h(\underline{y})$ die Zusammensetzung von $h_0(\underline{y})$ und $h(\underline{y}')$. Nach der Definition von $g$ ist also $g(h(\underline{y}))$ die Zusammensetzung von $f(h_0(\underline{y}))$ und $g(h(\underline{y}'))$. Insbesondere stimmen $\underline{y}$ und $g(h(\underline{y}))$ im ersten Folgenglied überein. Da dies für alle $\underline{y} \in X_2$ gilt, folgt durch Induktion über $i$, dass die Folgen $\underline{y}$ und $g(h(\underline{y}))$ auch im $i$-ten Glied übereinstimmen für alle $i \geqslant 0$. Also ist $g \circ h$ die Identität.

   Schliesslich schreibe jede Folge $\underline{x} \in X_3$ als Zusammensatzung von $x_0$ mit der Folge $\underline{x}' = (x_1, x_2, \ldots)$. Nach Konstruktion von $g$ ist dann $g(\underline{x})$ die Zusammensetzung von $f(x_0)$ mit der Folge $g(\underline{x}')$. Nach der Definition von $h$ ist dann aber $h(g(\underline{x}))$ die Zusammensetzung von $h_0(g(\underline{x})) = x_0$ mit der Folge $h(g(\underline{x}'))$. Durch Induktion über $i$ folgt daraus, dass für jedes $\underline{x} \in X_3$ die Folgen $\underline{x}$ und $h(g(\underline{x}))$ im $i$-ten Glied übereinstimmen für alle $i \geqslant 0$. Also ist $h \circ g$ die Identität.

Somit ist $h$ ein beidseitiges Inverses von $g$; also sind sie zueinander inverse Bijektionen.

(c) Fixiere $n \geqslant 2$. Für jedes $0 \leqslant i < n-1$ sei $f_n(i)$ die endliche Folge über dem Alphabet $\{0, 1\}$, die aus $i$ Einsen gefolgt von einer Null besteht, und sei $f_n(n-1)$ die endliche Folge, die nur aus $n-1$ Einsen besteht. Jeder Folge $\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots) \in X_n$ ordnen wir dann die Folge $g_n(\underline{x}) \in X_2$ zu, die durch Zusammensetzen der Wörter $f_n(x_0), f_n(x_1), \ldots$ entsteht. Wie in (b) definiert dies eine Bijektion $g_n \colon X_n \to X_2$. Insgesamt liefert dies eine Bijektion $g_n^{-1} \circ g_m \colon X_m \to X_n$.

4. Sei $V$ ein unendlichdimensionaler $K$-Vektorraum. Beweise

$$|V| = \max\{|K|, \dim_K(V)\}.$$

*Lösung:* Da $V$ unendlichdimensional ist, existiert ein Vektor $0 \neq v \in V$. Für diesen erhalten wir eine Injektion $K \hookrightarrow V$, $\lambda \mapsto \lambda v$; also folgt $|K| \leqslant |V|$. Sodann betrachten wir eine Basis $B$ von $V$. Wegen $B \subseteq V$ gilt dann $\dim_K(V) = |B| \leqslant |V|$. Zusammen folgt daraus

$$\alpha \ := \ \max\{|K|, \dim_K(V)\} \ \leqslant \ |V|.$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, betrachten wir die Surjektion

$$\bigcup_{n\in\omega} K^n \times B^n \twoheadrightarrow V, \ \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i b_i.$$

Nach Aufgabe 1 aus Serie 6 besitzt diese einen Schnitt, also gilt

$$|V| \ \leqslant \ \Big|\bigcup_{n\in\omega} K^n \times B^n\Big|.$$

Da nun $B$ unendlich ist, ist auch $\alpha$ unendlich und daher $\alpha^m = \alpha$ für alle natürlichen Zahlen $m \geqslant 1$ nach einem Satz aus der Vorlesung vom 18. 4. 23. Wegen $|K| \leqslant \alpha$ und $|B| \leqslant \alpha$ gilt daher

$$|K^n \times B^n| \ = \ |K|^n \cdot |B|^n \ \leqslant \ \alpha^n \cdot \alpha^n \ = \ \alpha^{2n} \ = \ \alpha$$

für alle $n \in \omega$. Somit existiert eine Injektion $\varphi_n \colon K^n \times B^n \hookrightarrow \alpha$. Mithilfe dieser konstruieren wir die Injektion

$$\bigcup_{n\in\omega} K^n \times B^n \hookrightarrow \omega \times \alpha, \ \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle \mapsto \big\langle n, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_n)\big\rangle.$$

Da $\alpha$ unendlich ist, gilt nun aber auch $|\omega \times \alpha| = \max\{\omega, \alpha\} = \alpha$. Zusammen folgt damit

$$|V| \ \leqslant \ \Big|\bigcup_{n\in\omega} K^n \times B^n\Big| \ \leqslant \ |\omega \times \alpha| \ = \ \alpha.$$

Aus $|V| \leqslant \alpha \leqslant |V|$ folgt schliesslich $|V| = \alpha$, wie gewünscht.

**5. Beweise den *Satz von Hessenberg:* Für jede unendliche Menge $x$ gilt $x \times x \sim x$.

*Lösung:* Siehe [3, Satz 6.4] oder [6, Kap.IX Satz 1.11].