Serie 9

Körper, Angeordnete Körper

1. Konstruiere eine explizite Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$.

2. Betrachte einen angeordneten Körper $(K, \leqslant)$. In der Vorlesung wurde für alle $x, y, z \in K$ gezeigt:

   (a) $x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$
   (b) $x < y \iff x + z < y + z$
   (c) $x \geqslant 0 \iff -x \leqslant 0$
   (d) $x > 0 \iff -x < 0$
   (e) $1 > 0$

   Beweise die übrigen Grundeigenschaften:

   (f) $x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0$
   (g) Ist $z > 0$, so gilt $x \leqslant y \iff xz \leqslant yz$.
   (h) Ist $z > 0$, so gilt $x < y \iff xz < yz$.

3. Beweise, dass keine Totalordnung $\leqslant$ auf $\mathbb{C}$ existiert, so dass $(\mathbb{C}, \leqslant)$ ein angeordneter Körper ist.

4. Sei $(K, \leqslant)$ ein vollständiger angeordneter Körper. Betrachte für jedes $x \in K$ die Menge $A_x := \{a \in \mathbb{Q} \mid a < x\}$. Beweise für alle $x, y \in K$ mit $x, y \geqslant 0$ die Gleichung

$$A_{xy} \;=\; \big\{ab \;\big|\; a \in A_x,\ b \in A_y,\ a, b \geqslant 0\big\} \cup \mathbb{Q}^{<0}.$$