Musterlösung Serie 9

Körper, Angeordnete Körper

1. Konstruiere eine explizite Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$.

   Lösung: Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ existieren eindeutige teilerfremde $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q > 0$ und $x = \frac{p}{q}$. Mit dieser Schreibweise definieren wir die Höhenfunktion

   $$H\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} = \omega,\ \ H(x) := \max\{|p|, |q|\}.$$

   Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $H^{-1}(n) := \{x \in \mathbb{Q} \mid H(x) = n\}$ dann eine endliche Menge. Wir ordnen deren Elemente gemäss der gegebenen Ordnung $\leqslant$ auf $\mathbb{Q}$ und stellen die Blöcke $H^{-1}(n)$ hintereinander gemäss der gegebenen Ordnung für n. Dies ergibt eine Auflistung $x_0, x_1, \ldots$ aller Elemente von $\mathbb{Q}$, in der jedes Element genau einmal vorkommt, also die gesuchte Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $k \mapsto x_k$. Die so erhaltene Auflistung beginnt mit

   $$-1,\ 0,\ 1;\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2;\ -3,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ 3;\ \ldots$$

   Präziser gesagt betrachten wir die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{Q}$:

   $$y \preceq x \iff \begin{cases} H(y) < H(x) & \text{oder} \\ H(y) = H(x) \text{ und } y \leqslant x. \end{cases}$$

   Nach Aufgabe 3 von Serie 4 ist dies eine Totalordnung. Wir behaupten, dass sie ausserdem eine Wohlordnung ist. Betrachte dafür eine nichtleere Teilmenge $X \subseteq \mathbb{Q}$ und wähle irgendein $x \in X$. Für jedes $y \in X$ mit $y \preceq x$ ist dann $H(y) \leqslant H(x)$ und folglich $y = \frac{p}{q}$ mit $|p|, |q| \leqslant H(x)$. Hier variiert das Paar (p, q) nur über eine endliche Menge; somit gibt es nur endlich viele $y \in X$ mit $y \preceq x$. Das kleinste von diesen ist dann ein kleinstes Element von X, wie gewünscht.

   Da $\mathbb{Q}$ unendlich ist, können wir nun rekursiv eine Folge $(x_0, x_1, \ldots)$ in $\mathbb{Q}$ konstruieren durch die Bedingung, dass jedes x_k das eindeutige kleinste Element von $\mathbb{Q} \smallsetminus \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$ bezüglich $\preceq$ ist. Nach Konstruktion ist die Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $k \mapsto x_k$ dann injektiv. Wir behaupten, dass sie ausserdem surjektiv ist. Denn wäre $x \in \mathbb{Q}$ nicht im Bild, so würde durch Induktion über k folgen, dass jedes $x_k \prec x$ ist. Dies widerspricht aber dem Umstand, dass es nur endlich viele $y \in \mathbb{Q}$ mit $y \prec x$ gibt. Somit ist die Abbildung bijektiv, wie gewünscht.

   Aliter: Wir konstruieren eine bijektive Abbildung in die umgekehrte Richtung. Wie oben zeigt man, dass die Menge $\mathbb{Q}_{\prec x} := \{y \in \mathbb{Q} \mid y \prec x\}$ endlich ist für jedes $x \in \mathbb{Q}$. Mit $k(x) := |\mathbb{Q}_{\prec x}|$ erhalten wir also eine wohldefinierte Abbildung $k\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Wir behaupten, dass diese bijektiv ist.

Zuerst seien $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x \neq y$. Nach etwaiger Vertauschung können wir $x \prec y$ annehmen. Dann ist $\mathbb{Q}_{\prec x} \cup \{x\} \subseteq \mathbb{Q}_{\prec y}$ mit $x \notin \mathbb{Q}_{\prec x}$ und folglich $k(x) + 1 = |\mathbb{Q}_{\prec x} \cup \{x\}| \leqslant |\mathbb{Q}_{\prec y}| = k(y)$. Da $k(x)$ endlich ist, impliziert dies $k(x) \neq k(y)$; somit ist die Abbildung injektiv.

Sodann ist $-1 = \frac{-1}{1}$ das kleinste Element von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\preceq$ und daher $k(-1) = |\mathbb{Q}_{\prec -1}| = |\varnothing| = 0$; also ist $0 \in \text{Bild}(k)$. Sei weiter $n \in \text{Bild}(k)$ mit $n = k(x)$. Dann hat die nichtleere Teilmenge $\{y \in \mathbb{Q} \mid x \prec y\}$ ein kleinstes Element x' bezüglich $\preceq$, und für diese ist $\mathbb{Q}_{\prec x'}$ die disjunkte Vereinigung von $\mathbb{Q}_{\prec x}$ und $\{x\}$. Also ist $k(x') = |\mathbb{Q}_{\prec x'}| = |\mathbb{Q}_{\prec x}| + 1 = n + 1$ und somit $n + 1 \in \text{Bild}(k)$. Durch Induktion über n zeigt dies $\text{Bild}(k) = \mathbb{N}$; also ist k surjektiv.

2. Betrachte einen angeordneten Körper $(K, \leqslant)$. In der Vorlesung wurde für alle $x, y, z \in K$ gezeigt:

   (a) $x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$
   (b) $x < y \iff x + z < y + z$
   (c) $x \geqslant 0 \iff -x \leqslant 0$
   (d) $x > 0 \iff -x < 0$
   (e) $1 > 0$

   Beweise die übrigen Grundeigenschaften:

   (f) $x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0$
   (g) Ist $z > 0$, so gilt $x \leqslant y \iff xz \leqslant yz$.
   (h) Ist $z > 0$, so gilt $x < y \iff xz < yz$.

   Lösung:

   (f) Aufgrund der Symmetrie zwischen x und $\frac{1}{x}$ reicht es aus, eine Implikation zu zeigen. Sei also $x > 0$, und nehmen wir $\frac{1}{x} \leqslant 0$ an. Nach (c) gilt dann $-\frac{1}{x} \geqslant 0$, und aus dem zweiten Axiom für $\leqslant$ folgt daraus $-1 = x \cdot (-\frac{1}{x}) \geqslant 0$. Nach (c) impliziert dies wiederum $1 \leqslant 0$, was (e) widerspricht. Also gilt $\frac{1}{x} > 0$.
   (g) Sei $z > 0$ und $x \leqslant y$. Aufgrund von (a) gilt dann $0 \leqslant y - x$. Wegen $z \geqslant 0$ folgt daraus $0 \leqslant (y - x)z = yz - xz$, und mit (a) folgt daraus die gewünschte Ungleichung $xz \leqslant yz$. Für die umgekehrte Implikation beachte, dass nach (f) auch $\frac{1}{z} > 0$ ist. Im Fall $xz \leqslant yz$ folgt daher genauso $x = xz \cdot \frac{1}{z} \leqslant yz \cdot \frac{1}{z} = y$, wie gewünscht.
   (h) Sei $z > 0$ und $x < y$. Nach (g) gilt dann bereits $xz \leqslant yz$. Wäre $xz = yz$, so müsste wegen $z \neq 0$ dann schon $x = y$ sein, was der Annahme $x < y$ widerspricht. Also gilt $xz < yz$. Die Umkehrung folgt genauso wie in (g).

3. Beweise, dass keine Totalordnung $\leqslant$ auf $\mathbb{C}$ existiert, so dass $(\mathbb{C}, \leqslant)$ ein angeordneter Körper ist.

   Lösung: Sei $\leqslant$ eine Totalordnung auf $\mathbb{C}$, so dass $(\mathbb{C}, \leqslant)$ ein angeordneter Körper ist. Dann ist $i \geqslant 0$ oder $i \leqslant 0$. Im zweiten Fall folgt aus der Grundeigenschaft 2 (c) dann $-i \geqslant 0$. Somit gilt für eines der beiden Vorzeichen $\pm i \geqslant 0$. Aus dem zweiten Axiom für $\leqslant$ folgt daraus $-1 = (\pm i)^2 \geqslant 0$. Nach 2 (c) ist dann aber $1 < 0$, was der Eigenschaft 2 (e) widerspricht.

4. Sei $(K, \leqslant)$ ein vollständiger angeordneter Körper. Betrachte für jedes $x \in K$ die Menge $A_x := \{a \in \mathbb{Q} \mid a < x\}$. Beweise für alle $x, y \in K$ mit $x, y \geqslant 0$ die Gleichung

$$A_{xy} \;=\; \big\{ab \bigm| a \in A_x,\ b \in A_y,\ a, b \geqslant 0\big\} \cup \mathbb{Q}^{<0}.$$

   Lösung: Wir beginnen mit der Inklusion $\supseteq$. Aus $x \geqslant 0$ und $y \geqslant 0$ folgt zuerst $xy \geqslant 0$; wegen der Transitivität von $\leqslant$ gilt daher $\mathbb{Q}^{<0} \subseteq A_{xy}$. Sodann betrachte $a \in A_x$ und $b \in A_y$ mit $a, b \geqslant 0$. Dann gilt $0 \leqslant a < x$ und $0 \leqslant b < y$ und daher $xy > 0$ nach der Grundeigenschaft 2 (h). Im Fall $a = 0$ ist also $ab = 0 < xy$ und daher $ab \in A_{xy}$. Andernfalls ist $0 < a < x$ und $b < y$, und durch zweifache Anwendung der Eigenschaft 2 (h) folgt $ab < ay < xy$ und damit $ab \in A_{xy}$.

   Für die Inklusion $\subseteq$ betrachte $c \in A_{xy}$. Im Fall $c < 0$ liegt c in $\mathbb{Q}^{<0}$ und daher in der rechten Seite. Anderfalls ist $xy > c \geqslant 0$, und wegen $x, y \geqslant 0$ muss dann $x > 0$ und $y > 0$ gelten. Im Fall $c = 0$ ist dann $c = 0 \cdot 0$ mit $0 \in A_x \cap A_y$, liegt also in der rechten Seite. Im Fall $c > 0$ folgt mit 2 (h) aus $0 < c < xy$ dann aber $0 < c/x < y$. Nach einer Proposition aus der Vorlesung vom 25. 04. 2023 existiert also ein $b \in \mathbb{Q}$ mit $c/x < b < y$. Insbesondere ist dann $b > 0$, und durch abermalige Anwendung von 2 (h) folgt $a := c/b < x$. Nach Konstruktion sind dann $a \in A_x$ und $b \in A_y$, somit liegt $c = ab$ in der rechten Seite.