Serie 14

Determinante

1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
über dem Körper $\mathbb{R}$ und über dem Körper $\mathbb{F}_5$. Ist B invertierbar?

2. Jeder der folgenden Ausdrücke definiert eine Funktion D auf der Menge der 3×3 Matrizen über $\mathbb{R}$. In welchen dieser Fälle ist D eine 3-lineare Funktion?
   (a) $D(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$;
   (b) $D(A) = A_{11}^2 + 3A_{11}A_{22}$;
   (c) $D(A) = A_{11}A_{12}A_{33}$;
   (d) $D(A) = A_{13}A_{22}A_{32} + 5A_{12}A_{22}A_{32}$;
   (e) $D(A) = 0$;
   (f) $D(A) = 1$.

3. (a) Sei K ein Körper und $\lambda \in K$, und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Zeige:
      i. Sei B, so dass $A \xrightarrow{\lambda L_i \to L_i} B$. Dann gilt $\det B = \lambda \det A$;
      ii. Sei B, so dass $A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} B$. Dann gilt $\det B = -\det A$;
      iii. Sei B, so dass $A \xrightarrow{\lambda L_i + L_j \to L_j} B$ mit $i \neq j$. Dann gilt $\det B = \det A$.

   (b) Die Zahlen 2014, 1484, 3710 und 6996 sind alle durch 106 teilbar. Zeige ohne zu rechnen, dass auch
$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
durch 106 teilbar ist.

4. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Sei $A_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie:

$$\det(A_n) = n + 1.$$

6. Sei K ein Unterkörper der komplexen Zahlen und n eine positive ganze Zahl. Seien ausserdem $j_1, \dots, j_n$ und $k_1, \dots, k_n$ positive ganze Zahlen, welche nicht grösser als n sind. Definiere für jede $n \times n$ Matrix A über K

$$D(A) = A(j_1, k_1)A(j_2, k_2) \cdots A(j_n, k_n).$$

Zeige, dass D genau dann n-linear ist, wenn $j_1, \dots, j_n$ paarweise unterschiedlich sind.

Single Choice. Pro Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1$?

   (a) $x = -2$

   (b) $x = 2$

   (c) $x = -1$

   (d) $x = 1$

2. Sei K ein Körper und $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über K. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Eine quadratische Matrix A über K ist invertierbar genau dann wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

   (b) Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix hängt nur von den Diagonaleinträgen ab.

   (c) Für jedes $n \geqslant 0$ ist die Determinante $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ eine lineare Abbildung.

   (d) Für jedes $n > 0$ ist die Determinantenabbildung $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ surjektiv.

3. Unter welcher Operation bleibt die Determinante einer Matrix im Allgemeinen nicht gleich?

   (a) Vertauschen zweier Zeilen.

   (b) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

   (c) Transponieren.

   (d) Ersetzen durch eine ähnliche Matrix.

Multiple Choice Fragen.

1. Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Matrizen A und B aus $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $n \geqslant 2$ korrekt?

   (a) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

   (b) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $a_1, \cdots, a_n$ von A linear unabhängig sind.

   (c) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

   (d) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

   (e) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

2. Sei $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 4$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

   (a) $\det \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 8$.

   (b) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = 4$.

   (c) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = 4$.

   (d) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 12$.