D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2022

Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 15

Determinante

1. Sei K ein kommutativer Ring mit 1. Für eine 2×2 Matrix A über K ist die Adjunkte von A die 2×2 Matrix $\operatorname{adj} A$ gegeben durch

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

Sei ausserdem det die eindeutige Determinantenfunktion auf 2×2 Matrizen über K. Zeige:

(a) $(\operatorname{adj} A)A = A(\operatorname{adj} A) = (\det A)I$;

(b) $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)$;

(c) $\operatorname{adj}(A^t) = (\operatorname{adj} A)^t$.

(A^t ist die Transponierte von A.)

2. (a) Liste explizit alle 24 Permutationen von Grad 4 auf, gebe an, welche ungerade und welche gerade sind, und nutze dies um die komplette Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(1, \sigma 1) \cdots A(n, \sigma n)$$

für die Determinante einer 4×4 Matrix konkret anzugeben. Bemerke, dass im Fall $n \geqslant 4$ die Betrachtung einer Kombination von Diagonalen nicht genug ist, um ihre Determinante zu bestimmen.

(b) Wie viele *geraden* Permutationen sind für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ in S_n enthalten?

3. Eine $n \times n$ Matrix A heisst trigonal oder Dreiecksmatrix, wenn $A_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt oder wenn $A_{ij} = 0$ für $i < j$ gilt. Zeige, dass die Determinante einer trigonalen Matrix durch das Produkt $A_{11}A_{22} \cdots A_{nn}$ seiner diagonalen Einträge gegeben ist.

4. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Zeige

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Bemerkung: Produkte dieser art werden *Vandermonde Determinanten* genannt und die obige Matrix wird *Vandermonde matrix* genannt.

5. Sei K ein Körper und seien $A, B, C, D \in M_{n\times n}(K)$. Nehme ausserdem an, dass A und C kommutieren und $\det A \neq 0$ ist. Zeige

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \det(A\cdot D - C\cdot B)$$

Hinweis. Betrachte die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & O_n \\ \hline -C & A \end{array}\right).$$

6. Beweise die folgende Proposition durch Benutzung der Leibniz-Formel:

Proposition. *Sei K ein Körper und seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Dann ist*

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B).$$

Hint. Bezeichne mit $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ die Standardbasis von K^n und schreibe die Matrix B als Liste von Spaltenblöcken:

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c} \sum_{s_1=1}^n B(s_1,1)\mathbf{e}_{s_1} & \cdots & \sum_{s_n=1}^n B(s_n,n)\mathbf{e}_{s_n} \end{array}\right).$$

Du musst auch das folgende Lemma beweisen:

Lemma. Für alle $A \in M_{n\times n}(K)$ und alle $\sigma \in S_n$ gilt

$$\det\left(\begin{array}{c|c|c} A\cdot\mathbf{e}_{\sigma(1)} & \cdots & A\cdot\mathbf{e}_{\sigma(n)} \end{array}\right) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A).$$