Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 16

Charakteristisches Polynom, Eigenvektoren und Eigenwerte

1. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.

   (a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

   (b) Bestimme die Eigenwerte von A.

   (c) Die *geometrische Vielfachheit* eines Eigenwertes ist die Dimension seines Eigenraumes. Die *arithmetische Vielfachheit* eines Eigenwerts ist die Vielfachheit des Eigenwerts als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Bestimme die arithmetischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

2. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ und überprüfe, ob die Matrizen diagonalisierbar sind.

   (a) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $C := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Für eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix A drücke das charakteristische Polynom von A^{-1} in Termen des charakteristischen Polynoms von A aus.

4. Sei K^∞ der Raum aller unendlichen Folgen in K, und sei K_0^∞ der Unterraum aller Folgen, die schliesslich Null werden.

   (a) Finde alle Eigenwerte und Eigenvektoren des Endomorphismus

   $$T : K^\infty \to K^\infty,\ (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \ldots)\,.$$

   (b) Tue dasselbe für den induzierten Endomorphismus $K_0^\infty \to K_0^\infty$.

(c) Konstruiere einen Endomorphismus von K_0^∞ mit den Eigenwerten $0, 1, 2, 3, \ldots$

(d) Konstruiere einen Endomorphismus von K_0^∞, der keine Eigenwerte besitzt.

5. Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix, das heisst eine, für die ein $m \geqslant 1$ existiert mit $A^m = O$. Zeige, dass der einzige mögliche Eigenwert von A gleich 0 ist. Wann genau ist 0 ein Eigenwert von A?

6. Seien V ein K-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeige:

(a) Falls $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ ist und $G(v) \neq 0$, dann ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

(b) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ die gleichen Eigenwerte.

(c) Gib ein Gegenbeispiel zu (b) an, falls V nicht endlichdimensional ist.