D-MATH Lineare Algebra II FS 2023
Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 17

Eigenvectors, Eigenvalues

1. Sei in jedem der folgenden Fällen T_i der Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$, welcher in der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ von A_i repräsentiert wird und sei U_i der Endomorphismus von $\mathbb{C}^2$, welcher von A_i in der Standardbasis von $\mathbb{C}^2$ repräsentiert ist. Berechne für $i = 1, 2, 3$ das charakteristische Polynom von T_i und das von U_i, berechne die Eigenwerte jedes Endomorphismus, und finde für jeden Eigenwert des entsprechenden Eigenraums bestehend aus Eigenvektoren.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensional Vektorraum über K. Angenommen $T \in \mathrm{End}(V)$ ist invertierbar. Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in K^*$ gilt: $\mathrm{Eig}_T(\lambda) = \mathrm{Eig}_{T^{-1}}(1/\lambda)$.

3. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ der glatten(also unendlich oft differenzierbaren) Funktionen über $\mathbb{R}$ und die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} T: & C^\infty(\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

Berechne die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen (Eigenfunktion sind ein Synonym zu Eigenvektoren, wenn der entsprechende Raum aus Funktionen besteht) von T.

4. Zeige für $K = \mathbb{R}$, dass K^∞ keine abzählbare Basis besitzt

   Tipp: Benutze den Fact, dass paarweise verschiedene Eigenwerte zu einer Menge linear unabhängiger Eigenvektoren korrespondieren.

5. (a) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit f-invarianten Unterräumen V_i. Zeige, dass die arithmetische bzw. geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts $\lambda \in K$ von f gleich der Summe der arithmetischen bzw. geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert der Endomorphismen $f|_{V_i}$ von V_i ist.

   (b) Folgere, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $f|_{V_i}$ diagonalisierbar ist für jedes i.

(c) Seien f und g Endomorphismen desselben endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass f und g *simultan diagonalisierbar* sind (das heisst, dass eine Basis aus simultanen Eigenvektoren für f und g existiert) genau dann, wenn sie miteinander kommutieren und separat diagonalisierbar sind.

Tipp: Um die Rückwärtsimplikation zu beweisen, zeigen Sie zuerst, dass jeder Eigenraum von f g-invariant ist, d.h. dass g Eigenvektoren von f auf Eigenvektoren von f *im selben Eigenraum* abbildet.

6. Seien K ein Körper und V ein n-dimensionaler Vektorraum über K, wobei $n > 0$ ist.

(a) Sei T ein diagonalisierbarer Endomorphismus V mit nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerten λ_i für $1 \leqslant i \leqslant n$. Zeige

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{und} \quad \det(T) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Für $0 \leqslant k \leqslant n$, sei c_k der Coeffizient von x^k im charakteristischen Polynom von T. Gibe eine Formel von c_k an, die nur von den Eigenwerten von T abhängt.

(b) Sei $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar mit $\mathrm{Tr}(B) = 0$. Zeige $\det(B) \leqslant 0$.