Serie 18

Diagonalizabiltiy, Cayley-Hamilton

1. Seien K ein Körper und $n \geqslant 2$ und
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K).$$
Beweise
$$\mathrm{char}_A(X) = (-1)^n(X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0).$$
Tipp: Benutze Induktion.

2. Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix vom Rang r. Zeige, dass der Grad des Minimalpolynoms von A kleiner oder gleich $r+1$ ist.

3. Zeige, dass jede reelle invertierbare 2×2 Matrix eine der folgenden Eigenschaften erfüllt
   - die Matrix ist diagonalisierbar;
   - die Matrix ist triagonalisierbar mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1;
   - man kann eine Basis finden, so dass die Matrixdarstellung in dieser Basis durch
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } b \neq 0$$
   gegeben ist.

4. Seien K ein Körper und $A \in M_{n\times n}(K)$ und sei $p \in K[X]$ ein nicht-triviales Polynom, sodass $p(A) = 0$ ist. Zeige, dass jeder eigenwert von A eine Nullstele von p ist.

   Tipp: Beobachte und beweise für einen eigenvektor v von A und ein Polynom q über K die Beziehung zwischen v und $q(A) \cdot v$.

5. (a) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Beweise, dass der Unterraum $\langle I_n, A, A^2, \dots \rangle$ von $M_{n\times n}(K)$ Dimension $\leqslant n$ hat.

   (b) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finde ein Polynom $p(X)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

6. Beweise oder widerlege: Es existiert eine reelle $n \times n$-Matrix A mit

$$A^2 + 2A + 5I_n = 0$$

genau dann, wenn n gerade ist.