D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2023

Prof. M. Einsiedler

Prof. P. Biran

Serie 19

Scalar products, bilinear forms

1. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist für $x = \binom{x_1}{x_2}$ und $y = \binom{y_1}{y_2}$ durch

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + 7x_2y_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

2. Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant n$.

   (a) Zeige, dass durch
   $$\langle p, q\rangle := \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}\,dt$$
   ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

   (b) Bestimme die Matrix des Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, x, \ldots, x^n$.

3. Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt ausgestattet und für $i = 1, 2$ sei $v_i \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Formel

$$\langle v_1, v_2\rangle = ||v_1||\,||v_2||\cos(\widehat{v_1, v_2}),$$

die den Cosinus eines Winkels definiert, drehinvariant ist. Anders ausgedrückt, zeigen Sie, dass für jede Drehung der Ebene $R : V \to V$ gilt

$$\cos(\widehat{v_1, v_2}) = \cos(\widehat{Rv_1, Rv_2}),$$

was wir von einer guten Definition des Winkels zwischen 2 Vektoren erwarten würden.

4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeige:

   (a) Die Matrix A^TA ist symmetrisch.

   (b) Die Matrix A^TA ist positiv definit genau dann, wenn A invertierbar ist.

   (c) Es gilt $\mathrm{Rang}(A^TA) = \mathrm{Rang}(A)$.

5. (a) Sei $\| \cdot \|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Zeige, dass die Norm genau dann von einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V induziert wird, wenn sie für alle $x, y \in V$ die *Parallelogrammidentität*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt.

(b) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Betrachte die folgende Abbildung:

$$\begin{array}{rccc} ||\cdot||_1 : & V & \to & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ & v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n |v_i| \end{array}$$

Zeige, dass $||\cdot||_1$ eine Norm auf V definiert, und beweise, dass sie nicht von einem Skalarprodukt herrührt.

6. Sei $K = \mathbb{R}$, $V = M_{n \times n}(K)$ und betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & K \\ (A, B) & \mapsto & \mathrm{Tr}(A^T B). \end{array}$$

Zeige, dass sie ein Skalarprodukt auf V definiert und finde eine orthonormale Basis bezüglich dieses Skalarprodukts. Die induzierte Norm wird als *Hilbert-Schmidt-Norm* bezeichnet. Gib eine Formel für die Norm einer Matrix $A \in V$ in Bezug auf ihre Einträge an.