# Serie 20

## Gram-Schmidt, Orthogonality

1. Seien $V$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $S \subset V$ ein Orthonormalsystem. Zeige, dass sich $S$ zu einer Orthonormalbasis von $V$ ergänzen lässt.

2. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeige:
   (a) Die Matrix $A^T A$ ist symmetrisch.
   (b) Die Matrix $A^T A$ ist positiv definit genau dann, wenn $A$ invertierbar ist.
   (c) Es gilt $\mathrm{Rang}(A^T A) = \mathrm{Rang}(A)$.
   (d) Angenommen $A$ ist symmetrisch und hat die Paare $(\lambda_1, v_1)$ und $(\lambda_2, v_2)$ als Eigenwert-Eigenvektor, sodass $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ gilt. Zeige, dass falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, dann $v_1 \perp v_2$ gilt.

3. Berechne eine Zerlegung $A = QR$ der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
in eine orthogonale Matrix $Q$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix $R$. Verwende diese Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, 3, -3)^T$ zu lösen.

4. Ein Unterraum $U$ von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)^T$ und $v_2 = (0, 2, 1)^T$.
   (a) Bestimme je eine Orthonormalbasis von $U$ und von $U^\perp$.
   (b) Berechne die Darstellungsmatrizen der orthogonalen Projektionen $\mathbb{R}^3 \to U$ und $\mathbb{R}^3 \to U^\perp$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus (a).

5. Für jeden der folgenden Vektorräume $V$ mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soll die Menge $U^\perp$ für die gegebene Teilmenge $U$ gefunden werden.

   (a) Betrachte zuerst

   $$V_1 = \left\{ (a_0, a_1, a_2, \dots) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}, \quad \langle (a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n,$$

   $$U_1 = \{(a_n)_{n=0}^\infty \in V \mid \exists N \geqslant 0 \text{ sodass } \forall m \geqslant N : a_m = 0\}$$

   (b) Zweitens betrachte

   $$V_2 = C([0,1]), \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx,$$

   $$U_2 = \left\{ f \in V \mid \int_0^{1/2} f(x) dx = 0 \right\}.$$

6. Für einen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ betrachte den Isomorphismus

   $$\delta \colon V \to V^* := \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}), \ v \mapsto \delta(v) := \langle v, \cdot \rangle.$$

   (a) Zeige, dass genau ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle^*$ auf $V^*$ existiert, so dass $\delta$ eine Isometrie ist.

   (b) Sei $B$ eine geordnete Basis von $V$, und sei $B^*$ die zugehörige duale Basis von $V^*$. Gib die Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle^*$ bezüglich $B^*$ in Termen der Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich $B$ an.

**Single Choice**. In each exercise, exactly one answer is correct.

1. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der dazugehörigen Norm $|| \; ||$. Für welche Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt $||v + w|| = ||v|| + ||w||$?
   (a) $v = \binom{1}{1}, \; w = \binom{1}{0}$
   (b) $v = \binom{2}{1}, \; w = \binom{1}{2}$
   (c) $v = \binom{2}{3}, \; w = \binom{3}{1}$
   (d) $v = \binom{1}{2}, \; w = \binom{2}{4}$
2. Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
   (a) Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp v_3$.
   (b) Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp (v_2 + v_3)$.
   (c) Aus $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp -v_2$.
   (d) Aus $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp v_3$.
3. Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum und seien $S$, $T \subset V$ zwei Teilmengen. Welche der folgenden Eigenschaften ist im allgemeinen nicht äquivalent zu den anderen?
   (a) $S \subset T^\perp$
   (b) $T \subset S^\perp$
   (c) $S \perp T$
   (d) $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle = \{0\}$
4. Sei $S$ eine Teilmenge eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums $V$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
   (a) $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$.
   (b) $S$ ist das orthogonale Komplement eines Unterraumes von $V$.
   (c) $S^\perp$ ist ein Unterraum von $V$.
   (d) $V = S^\perp \oplus (S^\perp)^\perp$.

**Multiple Choice Fragen**

1. Welche der folgenden Matrizen sind hermitesch?

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

2. Welche der folgenden Matrizen sind unitär?

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

3. Seien $U, V$ unitäre $n \times n$ Matrizen, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Welche Aussagen sind allgemein korrekt?

   (a) $U + V$ ist unitär.

   (b) $\lambda U$ ist unitär.

   (c) $U^{-1}$ ist unitär.

   (d) $UV$ ist unitär.