Serie 21

Gram-Schmidt, Orthogonality

1. Seien $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und$A, B \in M_{n\times m}(K)$ und $C \in M_{m\times p}(K)$. Zeige d ie folgenden Eigenschaften der adjungierten Matrix:

   (a) $\overline{A+B}^T = \overline{A}^T + \overline{B}^T$;

   (b) For all $\lambda \in K$, $\overline{(\lambda A)}^T = \overline{\lambda}\,\overline{A}^T$;

   (c) $\overline{(\overline{A}^T)}^T = A$;

   (d) $\overline{I_n}^T = I_n$;

   (e) $\overline{(A\cdot C)}^T = \overline{C}^T \cdot \overline{A}^T$.

2. Sei $K = \mathbb{R}$. Betrachte das innere Produkt auf $K[x]_2$, welches definiert wird durch

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

   (a) Wende den Gram-Schmidt Algorithmus auf die Basis $1, x, x^2$ an, um eine orthonormale Basis von $K[x]_2$ zu erhalten.

   (b) Finde eine orthomormale Basis von $K[x]_2$, sodass die Darstellungsmatrix des Ableitungsoperator $p \mapsto p'$ auf $K[x]_2$ zu dieser Basis eine obere Dreiecksmatrix ist.

3. **Minimiere den Abstand zu einer Teilmenge.** Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei ausserdem U ein endlichdimensionaler Unterraum von V und schreibe $P_U : V \to U$ für die orthogonale Projektion auf U. Seien $v \in V$ und $u \in U$. Zeige

$$||v - P_U(v)|| \leqslant ||v - u|| \,.$$

   Beweise ausserdem, dass in der obigen Ungleichung Gleichheit gilt genau dann wenn $u = P_U(v)$.

4. Finde ein Polynom p mit reellen Koeffizienten und Grad höchstens 5 welches $\sin(x)$ auf dem Invervall $[-\pi, \pi]$ so gut wie möglich nähert, im Sinne, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x) - p(x)|^2 \, dx$$

   so klein wie möglich ist.

Hint. Formuliere dieses Problem um, um Aufgabe 3 zu benutzen.

5. Sei $V = C([-1,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

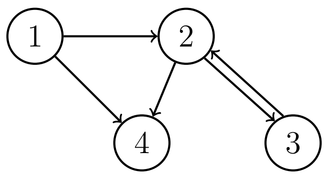
für $f, g \in V$. Sei $\varphi : V \to \mathbb{R}$ das lineare Funktional definiert durch $\varphi(f) = f(0)$. Zeige, dass kein $g \in V$ existiert, sodass

$$\forall f \in V : \varphi(f) = \langle f, g\rangle$$

ist.

6. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher gerichteter Graph. Genauer, seien V eine endliche Menge und $E \subseteq \{(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \mid v_{\text{init}}, v_{\text{term}} \in V \wedge v_{\text{init}} \neq v_{\text{term}}\} \subseteq V \times V$. Wir fassen V als Menge der Knoten eines Graphen auf, und $(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E$ als gerichtete Kante $v_{\text{init}} \in V$ zu $v_{\text{term}} \in V$ (wir visualisieren dies, indem wir einen Pfeil zu v_{term} an die Kante zeichnen).

   Beispiel eines gerichteten Graphen.

   Wir definieren ausserdem Vektorräume $\mathbb{R}^V = \{f : V \to \mathbb{R}\}$ und $\mathbb{R}^E = \{\varphi : E \to \mathbb{R}\}$, welche wir mit den inneren Produkten

$$\langle f_1, f_2 \rangle_V = \sum_{v \in V} f_1(v) f_2(v), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}^V$$
$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_E = \sum_{e \in E} \varphi_1(e) \varphi_2(e), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^E$$

   ausstatten. Ausserdem definieren wir $T : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^E$ als "kombinatorische Ableitung": für $f \in \mathbb{R}^V$ und $e = (v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E$, definieren wir

$$T(f)(e) = f(v_{\text{term}}) - f(v_{\text{init}}).$$

   Des Weiteren definieren wir $S : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}^V$ durch

$$S(\varphi)(v) = \sum_{\substack{v_{\text{init}} \in V \\ (v_{\text{init}}, v) \in E}} \varphi((v_{\text{init}}, v)) - \sum_{\substack{v_{\text{term}} \in V \\ (v, v_{\text{term}}) \in E}} \varphi((v, v_{\text{term}})).$$

   (a) Zeige $T^* = S$ und berechne $T^* \circ T = S \circ T$, was wir auch den kombinatorischen Laplace von G nennen.

   (b) Jetzt vereinfachen wir die Situation indem wir nur noch ungerichtete Kanten betrachten, d.h..

$$(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E \Leftrightarrow (v_{\text{term}}, v_{\text{init}}) \in E,$$

   und annehmen, dass der Graph d-regular ist (für jedes $v \in V$ existieren genau d Knoten $v_{\text{term}} \in V$ mit $(v, v_{\text{term}}) \in E$). Zeige, dass $T^* \circ T$ den Eigenwert 0 hat. Erkläre, warum die geometrische Vielfachheit von 0 mit dem Zusammenhang von G zu tun hat.

Single Choice. Es ist jeweis genau eine Antwort richtig.

1. Für welches $x \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} x & -x \\ x & x \end{pmatrix}$ unitär?

   (a) Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x|^2 = \frac{1}{2}$.

   (b) Genau für $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   (c) Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $x = -\overline{x}$.

   (d) Für $x = 0$.

2. Welche Menge ist ein Unterraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums $M_{n\times n}(\mathbb{C})$?

   (a) Die Menge der unitären $n \times n$ Matrizen.

   (b) Die Menge der Selbstadjungierten $n \times n$ Matrizen.

   (c) Die Menge der symmetrischen $n \times n$ Matrizen.

   (d) Die Menge der normalen $n \times n$ Matrizen.

Multiple Choice Fragen

1. Sei A eine hermitesche Matrix. Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{R}$.

   (b) $\det(A) \in \mathbb{R}$.