Serie 22

Selbstadjungiertere Operatoren, Spektraltheorie

1. Sei K ein Körper und sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler K-Skalarproduktraum. Betrachte $T \in \mathrm{End}(V)$ und einen Unterraum U von V. Zeige, dass U invariant unter T ist genau dann wenn $U^\perp$ invariant unter T^* ist.

2. Seien f, g_1, und g_2 Endomorphismen eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums, sodass
$$f^* \circ f \circ g_1 = f^* \circ f \circ g_2\,.$$
Zeige $f \circ g_1 = f \circ g_2$.

3. Seien V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$ ein normaler Operator. Für einen Unterraum $W \subseteq V$ schreiben wir P_W für die orthogonale Projektion auf W.

   (a) Beweise:

   Theorem. *Es existieren endlich viele komplexe Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, und wechselseitig orthogonale Unterräume $W_1, \ldots, W_k$ von V, sodass*
   $$T = \lambda_1 P_{W_1} + \cdots + \lambda_k P_{W_k}.$$

   (b) Zeige, dass für jeden Unterraum U von V die Projektion P_U selbstadjungiert ist.

4. Wir machen $\mathbb{R}[x]_2$ durch
$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$
zu einem Skalarproduktraum. Definiere $T \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}[x]_2\right)$ durch $T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = a_1x$.

   (a) Zeige, dass T nicht selbstadjunigert ist.

   (b) Die Darstellungsmatrix von T zur Basis $(1, x, x^2)$ ist
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Diese Matrix ist gleich ihrer konjugierten Transponierten, obwohl T nicht selbstadjungiert ist. Erkläre, warum dies kein Widerspruch ist.

5. Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus euklidischer Vektorräume.

   (a) Sei $\dim(V) < \infty$. Zeige, dass die Adjunierte von f im folgenden Sinne existiert: es existiert eine eindeutige Abbildung $f' : W \to V$, sodass

   $$\text{für alle } v \in V, \text{ für alle } w \in W : \langle f(v), w \rangle = \langle v, f'(w) \rangle.$$

   (b) Gilt diese Aussage auch noch, wenn wir statt $\dim(V) < \infty$ annehmen, dass $\dim(W) < \infty$ ist?

6. Betrachte den Vektorraum V, welcher alle unendlichoft differenzierbaren periodischen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit Periode 2π enthält, zusammen mit dem inneren Produkt

   $$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

   Sei $D : V \to V$ die lineare Transformation definiert durch $D(f) = \frac{df}{dx}$.

   (a) Ist D selbstadjungiert? Bestimme die Adjungierte, falls diese existiert.

   (b) Ist $\Delta := -D \circ D$ selbstadjungiert?

   (c) Sei $U \subset V$ die lineare Hülle der Funktionen

   $$\{x \mapsto \cos(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \mapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

   mit dem induzierten inneren Produkt von V. Finde eine orthonormale Basis von U bestehend aus Eigenvektoren von $\Delta|_U$ und bestimme die Vielfachheiten aller Eigenwerte.

Multiple Choice Fragen

1. Seien A und B komplexe selbstadjungierte $n \times n$ Matrizen, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen korrekt?

   (a) $A + B$ ist selbstadjungiert.

   (b) λA ist selbstadjungiert.

   (c) λA ist normal.

2. Seien A und B komplexe selbstadjungierte $n \times n$ Matrizen, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen korrekt?

   (a) AB ist selbstadjungiert.

   (b) $AB + BA$ ist selbstadjungiert.

   (c) $AB - BA$ ist normal.

   (d) ABA ist selbstadjungiert.

3. Seien A eine normale Matrix und $p \in \mathbb{C}[t]$ ein polynom. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen korrekt?

   (a) $p(A)^* = p(A^*)$.

   (b) $A^i(A^*)^j = (A^*)^j A^i$.

   (c) $p(A)$ ist normal.

   (d) Jeder Eigenwert λ von A ist auch ein Eigenwert von $p(A)$.

   (e) Jeder Eigenvektor v von A ist auch ein Eigenvektor von $p(A)$.