Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 23

Positiv-Definitheit, Isometrien

1. Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$, V ein K-Vektorraum, und sei B be a symmetric bilinearform on V. Wir definieren $q_B(v) = B(v,v)$ für jedes $v \in V$ als die quadratische Form, die mit B assoziiert ist. Zeigen Sie

$$B(v,w) = \frac{1}{2}(q_B(v+w) - q_B(v) - q_B(w)).$$

2. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeige, dass A orthogonal und $\det A = 1$ ist.

   (b) Bestimme die Drehachse und den Drehwinkel von $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Av$.

3. Welche der folgenden drei reellen symmetrischen Matrizen sind positiv definit?

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Verwende das Hauptminorenkriterium.

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (A) A ist positiv definit, d.h. $v^T A v > 0$ für alle $v \neq 0$;

   (B) Alle Eigenwerte von A sind positiv;

   (C) Es existert eine invertierbare symmetrische Matrix $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $S^2 = A$.

5. Zeige: Für jeden orthogonalen Endomorphismus f eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V gilt

$$|\operatorname{Tr}(f)| \leqslant n.$$

   Für welche f gilt Gleichheit?

6. Betrachten Sie zwei zweidimensionale Teilräume $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Menge der Elemente $T \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, so dass

$$TE_1 = E_2$$

gilt, in Bezug auf orthogonale Basen von E_1 und E_2.

Hinweis: Gehen Sie zunächst davon aus, dass $E_1 = E_2 = \mathrm{Sp}(e_1, e_2)$ ist.