D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2023

Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 24

Bilinearformen, Singulärwertzerlegung, Jordansche Normalform

1. (a) Bestimme eine Singulärwertzerlegung $A = QDR$ der reellen Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) Gib eine Singulärwertzerlegung von A^T an.

2. Betrachte die reelle Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$
Finde eine Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, sodass $P^{-1}AP$ diagonal ist.

3. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Benutze das Lemma über verallgemeinerte Eigenräume aus der Vorlesung, um die folgenden Aussagen zu beweisen. Benutze aber nicht das Theorem über die Jordannormalform.
   (a) Betrachte ein nilpotentes $N \in \mathrm{End}(V)$. Zeige, dass 0 der einzige Eigenwert von N ist.
   (b) Betrachte ein nilpotentes $N \in \mathrm{End}(V)$. Zeige, dass $N^n = O_{n\times n}$. Anders ausgedrückt, ist N nilpotent mit Index kleiner als oder gleich $\dim(V)$.
   (c) Betrachte ein nilpotentes $N \in \mathrm{End}(V)$ und nehme an, dass $p_N(x)$ in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann ist $p_N(x) = (-x)^n$.
   (d) Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und nehme an, dass $p_T(x)$ in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. Sei $\eta \in K$ und definiere $S = T - \eta\,\mathrm{Id}_V$. Dann zerfällt auch $p_S(x)$ über K in Linearfaktoren. Insbesondere gilt $p_S(x) = p_T(x + \eta)$.
   (e) Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ mit einzigem Eigenwert $\lambda \in K$ und nehme an, dass $p_T(x)$ in Linearfaktoren über K zerfällt. Definiere $N = T - \lambda\,\mathrm{Id}_V$. Dann ist $p_N(x) = (-x)^n$ und es gilt $N^n = O_{n\times n}$.

4. Bestimme die Jordansche Normalform der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_3$:
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Bestimme die Jordansche Normalform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der reellen Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. *Beispiel zur speziellen Relativitätstheorie.* Definiere die symmetrische Bilinearform $s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ für alle $v = (x, y, z, t)^T$ und $v' = (x', y', z', t')^T$ in $\mathbb{R}^4$ durch
$$s(v, v') := xx' + yy' + zz' - ctt',$$
wobei $c > 0$ ein fester Parameter ist. Der Raum $M := (\mathbb{R}^4, s)$ heisst die *Minkowski-Raumzeit* und der Parameter c heisst die *Lichtgeschwindigkeit.* Wir werden die Normalisierung $c = 1$ verwenden.

   Eine lineare Abbildung $F : M \to M$ heisst eine *Isometrie* oder eine *Lorentztransformation*, falls gilt
$$\forall v, w \in \mathbb{R}^4\colon\ s\big(F(v), F(w)\big) = s(v, w)\,.$$

   (a) Beweise, dass jede Isometrie bijektiv ist.

   (b) Beweise, dass die folgenden Endomorphismen Isometrien von M sind:

      i. Die Linksmultiplikation mit $\left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array}\right)$ für jedes $T \in O(3)$.

      ii. Ein *Lorentzboost* in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $v < c = 1$, gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix
$$B := \begin{pmatrix} \gamma & & & -v\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -v\gamma & & & \gamma, \end{pmatrix}$$
      für $\gamma := 1/\sqrt{1-v^2}$.

   (c) Die Teilmenge $\{x \in M \mid s(x, x) = 0\}$ heisst der *Lichtkegel in M.* Beweise den „relativistischen Satz vom Fussball“: Jede lineare Isometrie φ mit $\det(\varphi) = 1$ besitzt einen Eigenvektor, der im Lichtkegel liegt.

   Bemerkung. Für $c \to \infty$ nähert sich der Lichtkegel dem Unterraum $\{t = 0\}$ an und die Aussage reduziert sich auf den klassischen Fall.

Single Choice. In each exercise, exactly one answer is correct.

1. Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes V und sei λ ein Eigenwert von f. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
   (a) Jeder Eigenvektor von f zum Eigenwert λ liegt im Hauptraum $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda)$.
   (b) Jeder Vektor in $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda)$ ist ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.
   (c) Der Hauptraum $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda)$ ist nicht der Nullraum.
   (d) Für jeden Eigenwert μ von f mit $\mu \neq \lambda$ ist $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\mu) \cap \widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda) = \langle 0 \rangle$.

2. Für jeden Endomorphismus f eines n-dimensionalen Vektorraums V, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, und jeden Eigenwert λ von f gilt:
   (a) $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda) = \mathrm{Kern}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$.
   (b) $\dim(\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda)) = 1$.
   (c) $\dim(\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda)) = n$.
   (d) $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda) = \mathrm{Kern}((f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^n)$.

3. Der Hauptraum der reellen Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ bezüglich $X - 2$ ist
   (a) Eindimensional
   (b) Zweidimensional
   (c) Dreidimensional
   (d) Vierdimensional

4. Sei A eine 3×3-Matrix mit $A \neq 0$ und $A^2 = 0$. Dann besitzt die Jordansche Normalform von A
   (a) 1 Jordanblock.
   (b) 2 Jordanblöcke.
   (c) 3 Jordanblöcke.
   (d) Das hängt von der genauen Matrix A ab.

Multiple Choice Fragen

1. Welche der folgenden Aussagen ist **richtig**: Für beliebige ganze Zahlen $n > m \geqslant 1$ existiert eine quadratische Matrix ...

   (a) mit charakteristischem Polynom $X^m + X^n$.

   (b) mit Minimalpolynom X^m und charakteristischem Polynom X^n.

   (c) mit Minimalpolynom $X^m \cdot (X^n - 1)$.