D-MATH
Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 25

Jordan Normal form, Multilinear algebra

1. Beweise die folgende Propositionen:

   (a) Für alle K-Vektorräume $V_1, \ldots, V_r$ und W ist $\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W)$ ein Unterraum des Raums aller Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_r \to W$.

   (b) Betrachte lineare Abbildungen von K-Vektorräumen $f_i \colon V_i' \to V_i$ für $1 \leqslant i \leqslant r$ sowie $g \colon W \to W'$. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W) & \to & \mathrm{Mult}_K(V_1', \ldots, V_r'; W'), \\ \varphi & \mapsto & g \circ \varphi \circ (f_1 \times \cdots \times f_r). \end{array}$$

2. Sei K ein Körper. Betrachte den Raum $K[x]_n$ der Polynome über K vom Grad kleinergleich n. Bestimme eine Jordannormalform der Endomorphismen

   (a)

$$\begin{array}{rccc} D_1 : & K[x]_n & \to & K[x]_n \\ & p(x) & \mapsto & p'(x) \end{array}$$

   (b)

$$\begin{array}{rccc} D_2 : & K[x]_n & \to & K[x]_n \\ & p(x) & \mapsto & p''(x) \end{array}$$

3. Bestimme die Jordannormalform über $\mathbb{C}$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Die Jordan-Normalform wird oft mit der Idee motiviert, dass die Matrix möglichst viele Nullen enthalten soll. Wird die Anzahl Nullen aber wirklich von der Jordan-Normalform maximiert? Umgekehrt gefragt: Gibt es eine quadratische Matrix A über einem Körper, die mehr Nullen enthält als ihre Jordannormalform J?

5. Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit dem Minimalpolynom $(X-3)(X+5)^2$ und dem charakteristischem Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$. Bestimme die möglichen Jordanschen Normalformen von B.

6. Sei A eine reelle quadratische Matrix. Wir definieren das Exponential einer solchen Matrix als

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

wenn die Summe konvergiert.

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \geqslant 1$, berechne $\exp(J_{\lambda,n})$.

(b) Bestimme die Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + 9y(t) + 9z(t) \\ y'(t) &= 3x(t) - 6y(t) - 8z(t) \\ z'(t) &= -4x(t) + 11y(t) + 13z(t) \end{aligned}$$

zu der Anfangsbedingung $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Hinweis: Verwende die Jordansche Normalform. Wenn Sie weitere Hinweise benötigen, sehen Sie sich Kapitel 9.5 in den Notizen von Menny Akka an.

(c) Bestimme die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$f^{(3)}(t) - f^{(2)}(t) + f'(t) - f(t) = 0.$$

Hinweis: Schreibe die Gleichung als System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, und verwende die Jordansche Normalform.