D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2023

Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 26

Multilineare algebra, Tensorprodukt

1. Vereinfache den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$.

$$-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$$

2. Sei K ein Körper. Betrachte die bilinear Abbildung

$$\begin{array}{rccc}\psi: & K^m_{\text{cols}} \times K^n_{\text{cols}} & \to & M_{m\times n}(K) \\ & (u,v) & \mapsto & u \cdot v^T\end{array}$$

   (a) Zeige, dass das Bild von ψ die Menge der Matrizen von Rang kleinergleich 1 ist.

   (b) Ist $\mathrm{Im}(\psi)$ einen linear Unterraum?

   (c) Beschreibe $\mathrm{Sp}(\mathrm{Im}(\psi))$.

3. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeige

$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W).$$

4. Gegeben sei eine Menge I. Für ein Paar (U, ι) bestehend aus einem K-Vektorraum U und einer Abbildung $\iota\colon I \to U$ betrachte die folgende *universelle Eigenschaft*:

   Für jeden K-Vektorraum V und für jede Abbildung $\varphi\colon I \to V$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon U \to V$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ U \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & V. \end{tikzcd}$$

   (a) Zeige, dass für je zwei Paare (U, ι) und (U', ι') mit dieser universellen Eigenschaft ein eindeutiger Isomorphismus $\psi\colon U \xrightarrow{\sim} U'$ mit $\psi \circ \iota = \iota'$ existiert.

   (b) Zeige, dass die universelle Eigenschaft gilt für den K-Vektorraum

$$K^{(I)} := \left\{ (x_i)_{i\in I} \in K^I \;\middle|\; x_i \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } i \right\}$$

   mit der Abbildung

$$\iota_I : I \to K^{(I)}, \quad i \mapsto (\delta_{ij})_{j\in I}\,.$$

5. Beweise die folgenden Aussagen für Vektorräume U, V, V_1, V_2 über einem Körper K:

   (a) Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\kappa : U \otimes V \to V \otimes U$ mit
   $$\kappa(u \otimes v) = v \otimes u.$$
   Diese Abbildung ist ein Isomomrphismus

   (b) Es existiert ein eindeutiger Isomorphismus zwischen $U \otimes K$ und U.

   (c) Es existiert ein eindeutiger Isomorphismus
   $$U \otimes (V_1 \oplus V_2) \to (U \otimes V_1) \oplus (U \otimes V_2).$$

   Remark. Sie sollten keine Basen verwenden, wenn Sie die erforderlichen Homomorphismen definieren.

6. Sei V ein Vektorraum der Dimension $n < \infty$, und sei f ein Endomorphismus von V mit dem charakteristischen Polynom $\mathrm{char}_f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Für alle $r > 0$ betrachte die induzierte Abbildung
   $$\mathrm{Alt}^r(f)\colon\ \mathrm{Alt}^r_K(V, K) \to \mathrm{Alt}^r_K(V, K),\ \varphi \mapsto \varphi \circ (f \times \ldots \times f).$$
   Zeige: Für alle $r = 1, \ldots, n$ gilt
   $$a_{n-r} = (-1)^{n+r}\, \mathrm{Tr}\, \mathrm{Alt}^r(f).$$