D–MATH

Prüfung Linear Algebra I

401-1151-00L

Nachname | *Vorname* | *Legi-Nr.*

BÜ **SU** **XX-123-456**

Prüfungs-Nr.

001

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie, ob jede der folgenden Aussagen richtig oder falsch ist.
In dieser Übung seien V, W und W' Vektorräume über einem Körper K, und $U \subseteq V$ sei ein Unterraum von V.

1.MC1 [1 Punkt] Seien W_1 und W_2 lineare Komplemente von U in V. Dann ist W_1 isomorph zu W_2.

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC2 [1 Punkt] Seien $f : V \to W$ und $g : W \to W'$ lineare Abbildungen. Dann impliziert $g \circ f \equiv 0$, dass $f \equiv 0 \vee g \equiv 0$ sind.

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC3 [1 Punkt] Betrachten Sie einen Unterraum $V' \subseteq V$ derart, dass $U \subseteq V'$ ist. Dann ist

$$\left. V / U \middle/ V' / U \right. \cong \left. V \middle/ V' \right. .$$

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC4 [1 Punkt] Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar.

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC5 [1 Punkt] Die Menge

$$\{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\} \subset K[x]$$

ist eine Basis für $K[x]_3$, den Raum der Polynome über K vom Grad höchstens 3.

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC6 [1 Punkt] Seien $V_1, V_2 \subseteq V$ Unterräume. Dann ist

$$U + (V_1 \cap V_2) = (U + V_1) \cap (U + V_2).$$

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC7 [1 Punkt] Die Menge

$$\{(t,0,1),(0,t^2,1),(1,0,t)\} \subset \mathbb{R}^3$$

ist für alle $t \in \mathbb{R}$ linear unabhängig.

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC8 [1 Punkt] Seien $f : V \to W$ und $g : W \to W'$ lineare Abbildungen. Nehmen Sie an, dass f surjektiv ist. Dann ist

$$\mathrm{rank}(g \circ f) = \mathrm{rank}(g).$$

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC9 [1 Punkt] Sei $f : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Dann ist ihre duale Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ ebenfalls injektiv.

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC10 [1 Punkt] Betrachten Sie eine lineare unabhängige Untermenge $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\} \subset V$, für irgendeine natürliche Zahl $m \geq 1$, und $w \in V$. Dann ist

$$\dim \mathrm{Sp}(v_1 + w, v_2 + w, \cdots, v_m + w) < m.$$

(A) Richtig

(B) Falsch

Aufgabe 2

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K.

2.A1 [1 Punkt] Geben Sie die Definition von $\operatorname{Hom}(V, W)$.

2.A2 [9 Punkte] Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum und betrachten Sie den Raum

$$H := \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid f|_U \equiv 0\}.$$

Zeigen Sie, dass H isomorph zu $\operatorname{Hom}(V/U, W)$ ist.

Hinweis. Keiner der oben genannten Räume wird als endlich-dimensional angenommen.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und bezeichnen Sie $K[x]_3$ den Raum der Polynome mit Koeffizienten in K vom Grad höchstens 3. Sei $a \in K$. Betrachten Sie die lineare Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Comp}: & K[x]_3 & \to & K[x]_3 \\ & p(x) & \mapsto & p(ax) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rccc} D: & K[x]_3 & \to & K[x]_3 \\ & p(x) & \mapsto & p'(x) \end{array}$$

3.A1 **[6 Punkte]** Schreiben Sie die Darstellungmatrizen von Comp bzw. D in Bezug auf die Standardbasis für $K[x]_3$.

3.A2 **[4 Punkte]** Schreiben Sie die Darstellungmatrize von $D \circ \mathrm{Comp}$ in Bezug auf die Standardbasis für $K[x]_3$.

Aufgabe 4

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Betrachten Sie eine lineare Abbildung $f : V \to W$.

4.A1 [2 Punkte] Definieren Sie den Rang von f.

4.A2 [8 Punkte] Nehmen Sie an, dass V endlich-dimensional ist. Geben Sie die Formel an, die die Dimension von V mit der Dimension des Kernels von f und dem Rang von f verbindet, und beweisen Sie sie.

Aufgabe 5

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

5.A1 [2 Punkte] Geben Sie die Definition einer Basis von V.

5.A2 [8 Punkte] Nehmen Sie an, dass V endlich-dimensional ist. Sei S eine Menge, die erzeugend für V ist und sei $T \subseteq S$ eine endliche lineare unabhängige Menge. Schreiben Sie einen kurzen Algorithmus oder erklären Sie in ein paar Sätzen, wie man eine Basis $\mathcal{B}$ von V findet, die $T \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$ erfüllt.

Aufgabe 6

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & 3 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

6.A1 [**6 Punkte**] Für welche Werte von α ist die Matrix A invertierbar?

6.A2 [**4 Punkte**] Für alle Werte von α für die A nicht invertierbar ist, bestimmen Sie eine Basis für den Kern der linearen Abbildung

$$\begin{array}{rccc} T_A: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & v & \mapsto & A \cdot v \end{array}$$

D–MATH

Antwortheft – Linear Algebra I

401-1151-00L

Nachname *Vorname* *Legi-Nr.*

BÜ SU

XX-123-456

Prüfungs-Nr.

001

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: Wörterbuch Muttersprache – Deutsch oder Englisch

Bitte beachten Sie zunächst folgende Punkte:

- Schalten Sie Ihr **Handy aus** und legen Sie es weg - ebenso Ihre Smartwatch. **Sie dürfen während der Prüfung keine smarten Geräte auf dem Tisch liegen haben oder bei sich tragen.** Das gilt insbesondere auch bei einem allfälligen WC Besuch.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe. Außer bei der Richtig/Falsch-Übung sollten Sie kein Tippex verwenden. Streichen Sie einfach die Teile durch, die nicht korrigiert werden sollen.
- Beachten Sie die **Hinweise auf der Rückseite** dieses Blatts.

Viel Erfolg!

Diese Tabelle bitte nicht ausfüllen!

	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte							
Kontrolle							
Maximal	10	10	10	10	10	10	60

Hinweise zur Bearbeitung

- Aufgaben sind direkt **in diesem Antwortheft zu beantworten**:
  - Kreise deine Antworten in der Richtig/Falsch-Übung ein. Sie dürfen Änderungen mit Hilfe von Tippex vornehmen.
  - Nutzen Sie hierzu den mit der entsprechenden Aufgabe gekennzeichneten Bereich.
  - Zwischenschritte können gewertet werden! Vereinfachen Sie Ihre Lösungen weitestgehend.
  - Falls Sie mehr Platz benötigen, bekommen Sie von uns noch zusätzliches Papier. Markieren Sie deutlich, wenn Sie Aufgaben woanders weiterlösen. Beschriften Sie alle zusätzlichen Seiten, die Sie abgeben, ebenfalls mit Ihrem anonymisierten Code von der Vorderseite.

Am Ende der Prüfung

- Ordnen Sie Ihre zusätzlichen Lösungsblätter nach Aufgaben.
- Warten Sie, bis alle Prüfungen eingesammelt wurden. Befolgen Sie danach die Anweisungen zum geordneten Verlassen des Raums.

Bitte lösen Sie nicht die Klammerung dieses Hefts.

Aufgabe 1

1. (A) Richtig
   (B) Falsch
2. (A) Richtig
   (B) Falsch
3. (A) Richtig
   (B) Falsch
4. (A) Richtig
   (B) Falsch
5. (A) Richtig
   (B) Falsch
6. (A) Richtig
   (B) Falsch
7. (A) Richtig
   (B) Falsch
8. (A) Richtig
   (B) Falsch
9. (A) Richtig
   (B) Falsch
10. (A) Richtig
    (B) Falsch

Aufgabe 2

1.

2.

Aufgabe 3

1.

2.

Aufgabe 4

1.

2.

Aufgabe 5

1.

2.

Aufgabe 6

1.

2.