Lineare Algebra I/II - Prüfungsbeispiel

1. *(5 Punkte)*

   (a) *(2 Punkte)* Geben Sie die Definition der symmetrischen Gruppe auf n Elementen S_n. Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ geben Sie die Definition von $\operatorname{sign}(\sigma)$ an. Sie müssen nicht zeigen, dass $\operatorname{sign}(\sigma)$ wohldefiniert ist.

   (b) *(3 Punkte)* Sei $\sigma \in S_n$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$ die Matrix, die aus der Einheitsmatrix I_n durch Vertauschen ihrer Zeilen mithilfe der Permutation σ entsteht. Beweisen Sie, dass $\det(A) = \operatorname{sign}(\sigma)$.

2. *(5 Punkte)* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Sei $T \in \operatorname{End}(V)$ und seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ zwei verschiedene Eigenwerte von T. Bezeichnen wir mit $Eig_T(\lambda_i)$ den Eigenraum von λ_i und mit $\widetilde{Eig}_T(\lambda_i)$ den verallgemeinerten Eigenraum von λ_i, wobei $i = 1, 2$.

   (a) *(2 Punkte)* Beweisen Sie, dass $Eig_T(\lambda_1) \cap Eig_T(\lambda_2) = \{0\}$ ist.

   (b) *(3 Punkte)* Angenommen, das charakteristische Polynom $p_T(x)$ von T zerfällt als Produkt linearer Faktoren in $\mathbb{K}[x]$. Beweisen Sie, dass $\widetilde{Eig}_T(\lambda_1) \cap \widetilde{Eig}_T(\lambda_2) = \{0\}$ ist.

3. *(10 Punkte)* Kreuzen Sie zu jeder Aussage jeweils an, ob sie wahr (W) oder falsch (F) ist. Korrekte Antworten werden jeweils mit +1 Punkt gewertet, nicht korrekte Antworten oder keine Antwort mit 0 Punkten.

   (a) ☐W ☐F Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}i & 0 \\ \sqrt{3}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

   (b) ☐W ☐F Jede diagonalisierbare Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ besteht aus n linear unabhängigen Spaltenvektoren.

   (c) ☐W ☐F Jede Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, deren Eigenwerte alle positiv sind, ist symmetrisch.

   (d) ☐W ☐F Für jede Matrix $A \in SO(3)$ gilt $\operatorname{tr}(A) \leqslant 3$.

   (e) ☐W ☐F Sei $A \in M_{4,4}(\mathbb{C})$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $p_A(x) = (x+i)^2(x-\sqrt{2})(x+2)$. Dann ist A genau dann diagonalisierbar, wenn $\dim(\operatorname{Ker}(A + i1_4)) = 2$ ist.

   (f) ☐W ☐F Sei f ein Endomorphismus eines Vektorraumes. Dann existiert zu jedem Eigenwert von f ein eindeutiger Eigenvektor.

   (g) ☐W ☐F Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und V^* der Dualraum. Dann gilt $V \cong V^*$.

(h) □W □F Sei V der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann definiert die Abbildung

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x + \frac{1}{2})dx$$

ein Skalarprodukt auf V.

(i) □W □F Betrachte $v_1 \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v_1\| = 1$. Dann gibt es genau einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, so dass $(v, v_1) = 1$ und $\|v\| = 1$.

(j) □W □F Betrachte zwei Endomorphismen f, g eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraumes. Dann gilt

$$f^* g^* = gf \Leftrightarrow fg = g^* f^*.$$

4. (14 Punkte) Schreiben Sie Ihre Antwort direkt auf das Aufgabenblatt. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

(a) Berechnen Sie die Determinante von

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 & -\lambda^3 \\ 1 & 2\lambda & 4\lambda^2 & 8\lambda^3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & -2\lambda & 4\lambda^2 & -8\lambda^3 \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}. \qquad \det(A_\lambda) = \boxed{}$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ (alle sind anzugeben) ist die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{C}) \text{ invertierbar?} \qquad \alpha \in \boxed{}$$

(c) Sei A_α dasselbe wie in (b), und sei α so, dass A_α invertierbar ist. Berechnen Sie die Inverse von A_α. (Das Ergebnis hängt ab von der Variable α.)

$$A_\alpha^{-1} = \boxed{}$$

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}). \qquad \text{Antwort: } \boxed{}$$

(e) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & \alpha & -2 \\ 2 & -\alpha & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$ so dass $Ax = b$, wenn $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

$x \in$ $\boxed{}$

(f) Berechnen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Antwort: $\boxed{}$

(g) Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]$ die eindeutige lineare Abbildung mit $T(5,2) = 11 + 22x$ und $T(1,7) = 33 - 11x$. Bestimmen Sie $T(1,4)$.

$T(1,4) =$ $\boxed{}$

5. *(10 Punkte)* Betrachten Sie die Untervektorräume

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$$

von $V = \mathbb{R}^3$.

(a) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie die Dimensionen von V_1, V_2 und $V_1 \cap V_2$.

(b) *(3 Punkte)* Finden Sie eine Basis von $V_1 \cap V_2$.

(c) *(3 Punkte)* Finden Sie eine Basis für das orthogonale Komplement von $V_1 \cap V_2$ bezüglich des Standardskalarproduktes auf $V = \mathbb{R}^3$.

(d) *(2 Punkte)* Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{Kern}(f) = V_1 \cap V_2$ an.

6. *(7 Punkte)* Sei M eine endliche nicht-leere Menge und $V := \{f : M \to \mathbb{K}\}$ die Menge aller Abbildungen in den Körper $\mathbb{K}$. Es ist bekannt, dass V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist, wenn er mit den folgenden Operationen ausgestattet wird:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),\ \forall f, g \in V, x \in M,$$
$$(af)(x) := af(x),\ \forall f \in V, a \in \mathbb{K}, x \in M.$$

   (a) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie die Dimension von V.

   (b) *(3 Punkte)* Wählen Sie ein $m \in M$ und zeigen Sie, dass die Menge

$$U_m := \{f \in V \mid f(m) = 0\}$$

   ein Untervektorraum von V ist. Bestimmen Sie ausserdem die Dimension von U_m.

   (c) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie ein Komplement zu U_m in V.

7. *(10 Punkte)* Gegeben seien die komplexen Matrizen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass das Tupel $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ eine Basis des komplexen Vektorraums $M_{2,2}(\mathbb{C})$ der 2×2-Matrizen bildet.

   (b) *(1 Punkt)* Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} T : M_{2,2}(\mathbb{C}) &\to M_{2,2}(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto XB - BX \end{aligned}$$

   linear ist.

   (c) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung T bezüglich der Basis $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

   (d) *(4 Punkte)* Bestimmen Sie eine Basis von $M_{2,2}(\mathbb{C})$, die T trigonalisiert.

8. *(11 Punkte)* Sei f ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen unitären Vektorraumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ über $\mathbb{C}$. Angenommen, es gilt $f^n = id_V$ für ein $n \geqslant 1$.

   (a) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass durch

   $$\langle\langle v, w \rangle\rangle := \sum_{i=0}^{n-1} \langle f^i(v), f^i(w) \rangle$$

   ein weiteres Skalarprodukt $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ auf V definiert ist.

   (b) *(2 Punkte)* Welche Eigenschaft hat f bezüglich $(\langle \cdot, \cdot \rangle)$? Folgern Sie daraus, dass f diagonalisierbar ist.

   (c) *(2 Punkte)* Zeigen Sie nochmals, mit Hilfe des Minimalpolynoms, dass f diagonalisierbar ist.

   (d) *(5 Punkte)* Betrachten Sie den Fall $V = \mathbb{C}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für den Endomorphismus $f : v \mapsto Av$ mit der Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. *(5 Punkte)* Sei U und V endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $f \in \mathrm{End}(U)$ und $g \in \mathrm{End}(V)$, und betrachten Sie den Endomorphismus $f \otimes g : U \otimes V \to U \otimes V$. Drücken Sie $\mathrm{Spur}(f \otimes g)$ in Bezug auf $\mathrm{Spur}(f)$ und $\mathrm{Spur}(g)$ aus.