9. Jordan-Normalform

Wh. Eine lineare Abb $T \in \mathrm{End}(V)$ auf einem endl.-dim V.R. heisst diagonalisierbar falls V eine Basis $\mathcal{B}$ bestehend aus Eigenvektoren besitzt. Die Matrixdarst. ist dann eine Diagonalmatrix

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von T sind.

Wozu? z.B. nach Diagonalisierung ist T viel einfacher vorzustellen, da die Koordinatenachsen einfach gestreckt oder gestaucht werden.

z.B. Potenzen von T sind dann einfach:

$$[T^k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

z.B. über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und im Zusammenhang mit Diffgl. braucht man auch

$$[\exp T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \exp\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp\lambda_n \end{pmatrix}$$

Geht das immer?

Nein, wobei es 2 Gründe dafür geben kann

- Es kann sein, dass das char. Polynom p_T von T keine (oder zu wenige) Nullstellen im vorgegebenen Körper hat. Dies passiert z.B. für Drehungen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{für } \varphi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi.$$

Eine mögliche Lösung hierfür ist den "Körper zu vergrössern", z.B. obige Matrix über $\mathbb{C}$ zu betrachten.

- Es gibt aber auch Beispiele, wo das charakteristische Polynom von T komplett in Linearfaktoren zerfällt aber T trotzdem nicht diagonalisierbar ist. Wir wollen hier dieses zweite Problem besser verstehen.

Bsp. & Def. Für einen Körper $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, und $n \in \mathbb{N}$ nennt man

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

die *Jordan-Matrix zu Eigenwert λ in Dimension n*. $J_{\lambda,n}$ hat also entlang der Diagonale den Eigenwert λ n-mal, direkt darüber in der sogenannten *Nebendiagonale* eine 1 $(n-1)$-mal, und sonst nur Nullen.

Es gilt a) $P_{J_{\lambda,n}}(x) = (\lambda - x)^n$. Also ist λ der einzige Eigenwert mit alg. Vielfachheit gleich n.

b) Der Eigenraum von $J_{\lambda,n}$ zu λ ist gleich $\mathbb{K} e_1$ für $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Also ist die geometrische Vielfachheit gleich 1.

Da $J_{\lambda,n}$ eine Dreiecksmatrix ist, ist

$$p_{J_{\lambda,n}}(x) = \det\left(J_{\lambda,n} - x I_n\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda-x & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda-x \end{pmatrix} = (\lambda-x)^n$$

leicht zu berechnen. Dies beweist a).

Für b) betrachten wir

$$J_{\lambda,n} - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & & 0 \\ & 0 & \boxed{1} & \\ & & \ddots & \boxed{1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

und sehen, dass diese Matrix bereits reduzierte Zeilenstufenform hat. Die Einser in der Nebendiagonale sind genau $n-1$ Pivots, weswegen $J_{\lambda,n} - \lambda I_n$ Rang $n-1$ hat. Der Kern ist also eindimensional und es folgt

$$\mathrm{Eig}_{J_{\lambda,n}}(\lambda) = \ker(J_{\lambda,n} - \lambda I_n) = \mathrm{Sp}(e_1)$$

wie in (b) behauptet wurde.

Wir haben gesehen

p_T zerfällt in Linearfaktoren $\not\Longrightarrow$ T ist diagonalisierbar

wobei eben eine Jordan-Matrix ein Gegenbeispiel darstellt. Man kann nun fragen, ob Jordan-Matrizen gewissermassen das einzige Problem sind.

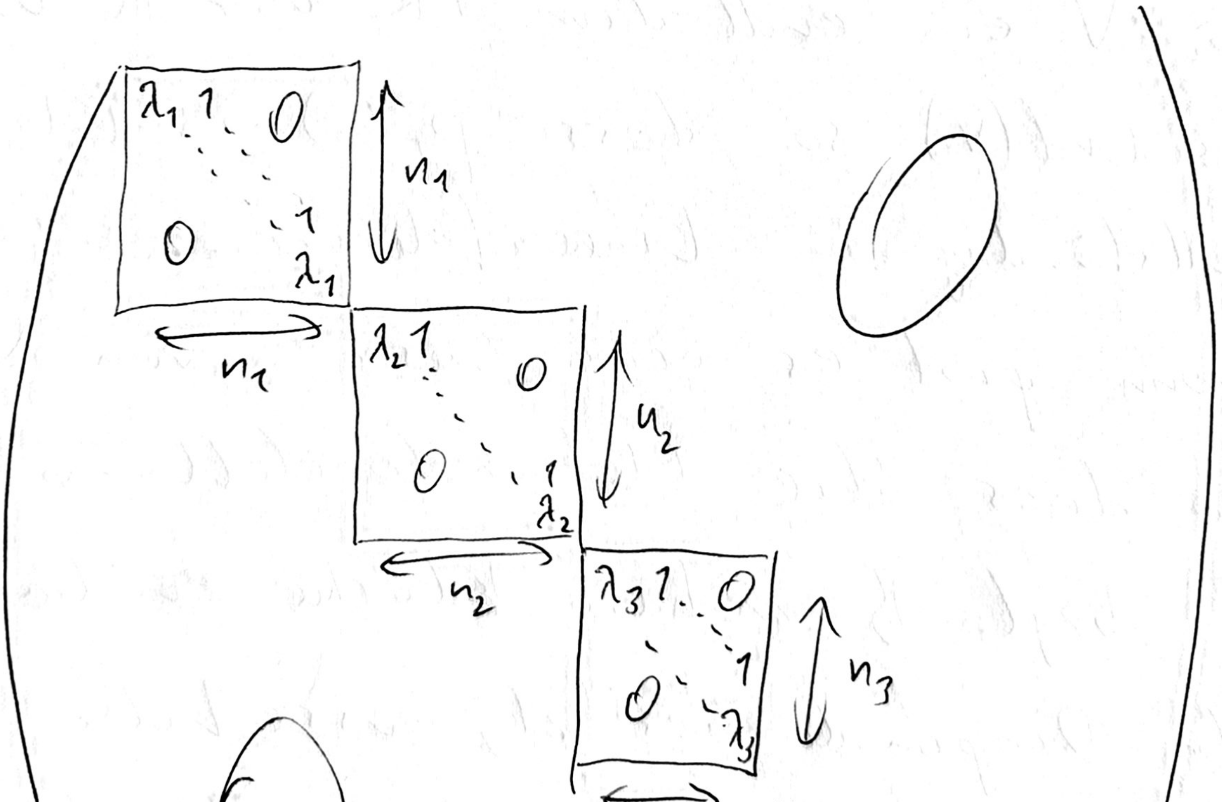
<u>Satz</u> (Jordan-Normalform)
Sei V ein endl.-dim. V.R. über $\mathbb{K}$ und $T \in \mathrm{End}(V)$ so dass $p_T(x)$ in $\mathbb{K}[x]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V so dass die Matrixdarstellung von T bzgl. $\mathcal{B}$ mehrere Blöcke entlang der Diagonale besitzt, ausserhalb dieser Blöcke stehen nur Nullen, und jeder Block entlang der Diagonale ist eine Jordan-Matrix für gewisse $\lambda \in \mathbb{K}$ und gewisse

Dimensionen. Bis auf Vertauschung der Blöcke ist diese Matrixdarstellung eindeutig – man spricht von der Jordan-Normalform

while Lie: Vertauschungen sind einfach genug

Der Beweis wird nachgeliefert, zuerst wollen wir die Aussage etwas besser verstehen.

Die Jordan-Normalform sieht also so aus:



Hier ist ein konkreteres <u>Beispiel</u>

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \lambda_1 & 1 \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \lambda_1 & 1 \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & & 0 & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}} & & & & \\ & 0 & & \boxed{\lambda_2} & & & \\ & & & & \boxed{\lambda_2} & & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_3 & 1 & 0 \\ & \lambda_3 & 1 \\ 0 & & \lambda_3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

hat Jordan-Normalform.

Wir wollen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ paarweise verschieden annehmen.

<u>Dann gilt:</u>

sollte bereits klar sein

- Dimension: 13
- Eigenwerte: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
- Char. Polynom: $(\lambda_1 - x)^6 (\lambda_2 - x)^4 (\lambda_3 - x)^3$
- Alg. Vielfachheiten, 6, 4, 3

auch einfach, siehe Prop. etwas später

- Geometrische Vielfachheiten
  2 für λ_1, 3 für λ_2, 1 für λ_3
- Minimalpolynom
  $(x-\lambda_1)^3 (x-\lambda_2)^2 (x-\lambda_3)^3$

Im Allgemeinen wird gelten, dass die Jordan-Normalform obige Info für jeden Endomorphismus sehr einfach bestimmt. Umgekehrt liefern geometrische Vielfachheiten und Minimalpolynom Einschränkungen, wie die Jordan-Normalform aussehen kann.

<u>Lemma</u> (Potenzen einer Jordan-Matrix)

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$J_{\lambda,n} = \lambda I_n + N$$

wobei

$$N = J_{0,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & 1 \\ & & \ddots & & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

D.h. für $k = 1, \ldots, n-1$ hat N^k Einsen genau in der "k-ten Nebendiagonale" und sonst nur Nullen. Des Weiteren ist $N^n = 0$. Schlussendlich gilt

$$J_{\lambda,n}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n}\lambda^{k-n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda \neq 0 \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

<u>Bew</u> N entspricht der linearen Abbildung, die auf den Basisvektoren

$$e_1 \to 0$$
$$e_2 \to e_1$$
$$\vdots$$
$$e_n \to e_{n-1}$$

erfüllt. D.h. $e_n \to e_{n-1} \to \dots \to e_1 \to 0$.

N^2 erfüllt demnach

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \to 0 \\ e_2 [\to e_1] \to 0 \\ e_3 [\to e_2] \to e_1 \\ \vdots \\ e_n \to e_{n-2} \end{array}\right\} \text{dies entspricht } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner gilt ebenso

$$N^k : e_j \mapsto \begin{cases} e_{j-k} & \text{falls } j-k \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies lässt sich leicht mittels Induktion bestätigen und die Matrix N^k hat damit die Beschreibung mittels der "k-ten Nebendiag.".

Für N^{n-1} gilt $e_n \xrightarrow{N^k} e_1$, $e_n \to e_{n-1} \to e_{n-1} \cdots \to e_3 \to e_2 \to e_1$

also $N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, woraus dann auch $N^n = 0$ folgt.

Da λI_n und N kommutieren, können wir den Binomialsatz anwenden:

$$J_{\lambda,n}^k = (\lambda I_n + N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j$$

Wir setzen $\binom{k}{j}=0$ falls $j>k$ ist und dann folgt die Formel für $J_{\lambda,n}^k$ aus der Beschreibung der Potenzen N^j. $\square$

<u>Prop.</u> Aus der Jordan-Normalform zu einem $T \in \mathrm{End}(V)$ können wir geom. Vielfachheiten und das Minimalpolynom wie folgt bestimmen:

- Für jeden Eigenwert λ ist die geom. Vielfachheit gleich der Anzahl der zu λ gehörigen Blöcke in der Jordan-Normalform (wobei Blöcke der Dim. 1 ebenso zählen).
- Das Minimalpolynom ist

$$m_T(x) = \prod_{\lambda \text{ Nullstelle}} (x-\lambda)^{\text{Dimension des grössten Blockes, der zu } \lambda \text{ gehört.}}$$

Bem. Sei $A = [T]_B$ die Jordan-Normalform.

Ang. $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ für $B \in Mat_{ee}(\mathbb{K})$ und $C \in Mat_{mm}(\mathbb{K})$.

Sei $u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ mit $v \in \mathbb{K}^e$ und $w \in \mathbb{K}^m$.

Dann gilt

$$Au = \lambda u \iff \begin{matrix} Bv = \lambda v \\ Cw = \lambda w \end{matrix}$$

Daraus folgt, dass der Eigenraum für A und λ die direkte Summe des Eigenraums für B und λ und des Eigenraums für C und λ ist.

Die geometrische Vielfachheit für A und λ ist also die Summe der geom. Vielfachheiten für B und für C. Für einen Jordan-Matrix $J_{\lambda,n}$ ist die geom. Vielfachheit gleich 1 (siehe Beispiel am Anfang dieses Kapitels). Kombinieren wir diese Aussagen (formal mittels Induktion nach der Anzahl der Jordanblöcke), so ergibt sich die Aussage in der Prop. über die geometrische Vielfachheit.

Für $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ wie oben gilt auch

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ 0 & C^k \end{pmatrix}$$

und damit für ein Polynom $q(x) \in K[x]$ dann auch

$$q(A) = \begin{pmatrix} q(B) & \\ & q(C) \end{pmatrix}.$$

Für einen Jordanblock $J_{\lambda,n}$ gilt (wegen dem Lemma) ausserdem

$$q(J_{\lambda,n}) = \begin{pmatrix} q(\lambda) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & q(\lambda) \end{pmatrix}$$

Falls $q(\lambda) \neq 0$ ist, so ist $q(J_{\lambda,n})$ invertierbar.

Falls $q(x) = (x-\lambda)^k$, so ist (wegen dem Lemma)

$$q(J_{\lambda,n}) = N^k = 0 \iff k \geq n.$$

Für ein allgemeines $m(x) \in K[x]$ spalten wir die Nullstelle λ so oft wie möglich ab:

$$m(x) = (x-\lambda)^k q(x) \quad \text{für ein } q(x) \in K[x] \text{ mit } q(\lambda) \neq 0$$

Dann folgt

$$m(J_{\lambda,n}) = 0 \iff N^k \underbrace{q(J_{\lambda,n})}_{\text{invertierbar}} = 0 \iff k \geq n.$$

Daraus ergibt sich nun auch die Aussage über das Minimalpolynom:

- Wenn $m(A)=0$ ist, so muss für jeden Jordanblock in A mit Eigenwert λ der Faktor $(x-\lambda)$ mindestens so oft in $m(x)$ abspaltbar sein wie die Grösse des Blocks.
- Dies stimmt gerade für das angegebene Polynom, weswegen $m(A)=0$ (da dies in jedem Jordanblock getrennt berechnet werden kann)

$\square$

Als erste Vorbereitung für den Beweis der Existenz der Jordan-Normalform beweisen wir zuerst ...

<u>Lemma</u> Sei V ein endl.-dim V.R über $\mathbb{K}$, $T\in End(V)$ und $\lambda\in\mathbb{K}$ ein Eigenwert. Dann ist der sogenannte verallgemeinerte Eigenraum

$$\widetilde{Eig_T}(\lambda)=\bigcup_{j=1}^{\infty}\ker(T-\lambda id_V)^j=\ker(T-\lambda id_V)^{\dim V}$$

ein Teilraum, der nur Eigenvektoren zum Eigenwert λ enthalten kann.

<u>Bew.</u> Da λ ein Eigenwert ist, gilt

$$\{0\} \subsetneq \ker(T-\lambda\,\mathrm{id}) \subseteq \ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^2 \subseteq \ldots \subseteq \ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^n$$
$$\subseteq \ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^{n+1} \subseteq V,$$

wobei $n = \dim V$. Dies zeigt (Warum?), dass es ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ geben muss für das

$$\ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^k = \ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^{k+1}$$

gilt. D.h. es gilt

$$\forall v \in V : (T-\lambda\,\mathrm{id})^{k+1} v = 0 \Rightarrow (T-\lambda\,\mathrm{id})^k v = 0$$

[$\Leftarrow$ diese Richtung ist offensichtlich]

Falls $(T-\lambda\,\mathrm{id})^{k+2} v = 0$ ist, so gilt für $w = (T-\lambda\,\mathrm{id})v$ dass $(T-\lambda\,\mathrm{id})^{k+1} w = (T-\lambda\,\mathrm{id})^{k+2} v = 0$ ist. Dies impliziert aber $0 = (T-\lambda\,\mathrm{id})^k w = (T-\lambda\,\mathrm{id})^{k+1} v$ und damit auch $(T-\lambda\,\mathrm{id})^k v = 0$. Wiederholen wir dieses Argument so folgt

$$\ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^k = \ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^{k+1} = \ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^{k+\ell}$$

für alle $\ell \geq 1$. Insbesondere ist

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^j = \ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^n$$

ein Teilraum.

Sei nun $v \in \ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu \in \mathbb{K}$. Dann gilt $T^i v = \mu^i v$ und auch $q(T)v = q(\mu)v$ für alle $q(x) \in \mathbb{K}[x]$. Insbesondere ist damit $(T-\lambda\,\mathrm{id})^n v = (\mu-\lambda)^n v = 0$, was $\mu = \lambda$ impliziert. $\square$

<u>Prop.</u> Sei V ein endl. dim. V.R. über $\mathbb{K}$, $T \in \mathrm{End}(V)$ so dass $p_T(x)$ in $\mathbb{K}[x]$ vollständig in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt. Dann gilt

$$V = \bigoplus_{\lambda \text{ Eigenwert}} \widetilde{\mathrm{Eig}}_T(\lambda)$$

<u>Bew.</u> Wir verwenden Induktion über die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte (Nullstellen von p_T).

Falls $p_T(x) = (\lambda - x)^{\dim V}$ ist, so folgt

$$V = \ker p_T(T) = \ker(T-\lambda\,\mathrm{id})^{\dim V} = \widetilde{\mathrm{Eig}}_T(\lambda)$$

aus dem Satz von Cayley-Hamilton.

Sei nun $T \in \mathrm{End}(V)$ so dass die Proposition für Endomorphismen mit weniger verschiedenen Eigenwerten bereits gilt. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert. Wir spalten den Linearfaktor $(x-\lambda)$ von $p_T(x)$ so oft wie möglich ab (formal verwendet dies Polynomdivision mit Rest in $\mathbb{K}[x]$) und erhalten

$$p_T(x) = (x-\lambda)^k q(x) \quad \text{für ein } k \geq 1 \text{ und } q \in \mathbb{K}[x] \text{ mit } q(\lambda) \neq 0.$$

Wir behaupten

$$V = \operatorname{Im} q(T) \oplus \ker q(T)$$
$$= \widetilde{\mathrm{Eig}}_T(\lambda) \oplus \ker q(T).$$

Wir bemerken zuerst, dass

(*) $\dim V = \dim \operatorname{Im} q(T) + \dim \ker q(T)$.

D.h. für die erste Gleichung genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{Im} q(T) \cap \ker q(T) = \{0\}$ — Sobald dies bekannt ist, ist die rechte Seite ein Teilraum der Dimension $\dim V$ und deswegen gleich V.

Wir werden stattdessen zeigen, dass

(a) $\operatorname{Im} q(T) \subseteq \widetilde{\mathrm{Eig}}_T(\lambda)$ und

(b) $\widetilde{\mathrm{Eig}}_T(\lambda) \cap \ker q(T) = \{0\}$.

Dann impliziert (b), dass $\widetilde{\mathrm{Eig}}_T(\lambda) \oplus \ker q(T)$ in der Tat eine direkte Summe ist. Und (a) impliziert, dass diese wegen ⊛ mindestens Dimension $\dim V$ hat. Aber dann ist die Dimension genau $\dim V$ und es muss in (a) Gleichheit gelten.

(a) folgt wieder aus Cayley-Hamilton. Da $p_T(T) = 0 = (T-\lambda id)^k q(T)$ ist, muss das Bild unter $q(T)$ im Kern von $(T-\lambda id)^k$ liegen.

Für (b) bemerken wir zuerst, dass $\ker q(T)$ (und analog $\widetilde{\mathrm{Eig}}_T(\lambda) = \ker (T-\lambda id)^{\dim V}$) unter T invariant ist: Falls $v \in \ker q(T)$ ist, so gilt $q(T)Tv = T\underbrace{q(T)v}_{=0} = 0$ womit $Tv \in \ker q(T)$. Damit ist der Durchschnitt $Z = \widetilde{\mathrm{Eig}}_T(\lambda) \cap \ker q(T)$ ebenso invariant unter T. Ang. $Z \neq \{0\}$ Die Einschränkung von T auf diesen Teilraum Z hat ein charakteristisches Polynom welches

$p_T(x)$ teilt (gilt allgemein für Teilräume – eine nette Übung). Da $p_T(x)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, muss die Einschränkung von T auf den Teilraum $\widehat{\mathrm{Eig}_T}(\lambda) \cap \ker q(T)$ einen Eigenvektor besitzen. Da λ der einzige Eigenwert für $\widehat{\mathrm{Eig}_T}(\lambda)$ ist, gibt es einen Vektor $v \in \ker q(T) \setminus \{0\}$ mit $Tv = \lambda v$ und $q(T)v = q(\lambda)v$. Da $q(\lambda) \neq 0$ ist, erhalten wir einen Widerspruch. Also ist $Z = \{0\}$ und (b) gilt.

Wir definieren $W = \ker q(T)$ und $S = T|_W : W \to W$. Wie bereits oben besprochen, macht dies Sinn, $p_S(x)$ teilt $p_T(x)$, und λ ist keine Nullstelle von $p_S(x)$ (da W keine Eigenvektoren zu λ enthält). Wir können also W als direkte Summe von seinen verallgemeinerten Eigenräumen schreiben. Dies zeigt gemeinsam mit der obigen Behauptung den Induktionsschritt.

$\square$

Beweis der Existenz der Jordan-Normalform

Wir behaupten, dass es genügt den Fall einer nilpotenten Abbildung $N \in End(V)$, $N^{\dim V} = 0$ zu betrachten.

Denn für eine andere lineare Abb $T \in End(V)$ mit $p_T(x) =$ Produkt von Linearfaktoren, gilt $V = \bigoplus_\lambda \widetilde{Eig_T}(\lambda)$ auf Grund der Prop. Da diese Teilräume invariant sind, können wir für jeden Eigenwert die nilpotente Abbildung

$$N_\lambda = (T - \lambda id)\Big|_{\widetilde{Eig_T}(\lambda)} \in End(\widetilde{Eig_T}(\lambda))$$

betrachten. Wir erhalten dann für $T|_{\widetilde{Eig_T}(\lambda)}$ die Jordan-Normalform indem wir zur Jordan-Normalform für N_λ λI addieren.

Sei ab nun $N \in End(V)$ nilpotent, so dass $N^{\dim V} = 0$ ist. Wir verwenden Induktion nach $\dim V$ um die Existenz der Jordan-Normalform zu zeigen.

Falls $\dim V = 1$, so ist $N = 0$ und $[N]_\mathcal{B}^\mathcal{B} = (0)$

hat Jordan-Normalform für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von V.

Sei nun $\dim V > 1$ und die Existenz von Jordan-Normalformen für V.R. kleinerer Dimensionen sei bereits bekannt.

Wir definieren

$$k = \min\{j \geq 1 \mid N^j = 0\} \leq \dim V$$

Falls $k = 1$ ist, so is $N = 0$ und $[N]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (0)$ hat Jordan-Normalform für jede Basis $\mathcal{B}$.
Wir nehmen also nun an, dass $k > 1$ ist.
Dann ist $N^{k-1} \neq 0$ und es gibt einen Vektor $e_k \in V$ mit $N^{k-1} e_k \neq 0$. (aber $N^k e_k = 0$ da $N^k = 0$) Wir definieren

$$e_j = N^{k-j} e_k \quad \text{für } j = 1, \ldots, k-1 \text{ (und } k)$$

<u>Behauptung</u> $e_1, \ldots, e_k$ sind l.u.

<u>Ang.</u> $c_1 e_1 + \ldots + c_k e_k = 0$

$$\begin{aligned} N^{k-2} \Big\Downarrow \quad & 0 + \ldots + 0 + c_k \underbrace{e_1}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_k = 0 \quad (\text{mit } N^{k-1}) \\ & 0 + \ldots + c_{k-1} e_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_{k-1} = 0 \ldots \text{ etc.} \end{aligned}$$

Damit ist $W = \mathrm{Sp}(e_1, \ldots, e_k)$ unter N invariant und

$$[N|_W]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist für $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_k)$ eine Jordan-Matrix. (Dies wird der grösste Block für N sein).

Da W unter N invariant ist, können wir auch

$$N': V/W \to V/W$$
$$v + W \mapsto Nv + W$$

betrachten. Dann gilt: N' ist noch immer nilpotent und besitzt nach Induktionsvorr. eine Jordan-Normalform ($\dim V/W = \dim V - k < \dim V$).

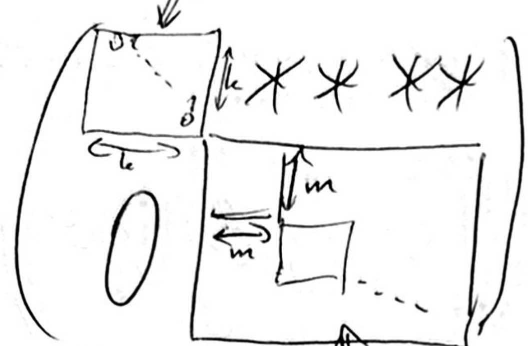
Sei $\mathcal{B}' = (f_1 + W, \ldots, f_e + W)$ eine Basis von V/W so dass $[N']^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}$ Jordan-Normalform besitzt. Dann ist

$$\mathcal{B}_2 = (e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_e)$$

eine Basis von V, die folgendes

erfüllt:

Jordan-Block für $N|_W : W \to W$

$[N]_{B_2}^{B_2} =$ 

Jordan-Normalform von N' auf V/W

D.h. bis auf den unbekannten Block rechts vom ersten Jordanblock für $N|_W$ haben wir bereits Jordan-Normalform.

Behauptung: Durch eine geschicktere Auswahl von dem Repräsentanten f_j von $f_j + W$ (Abänderung von f_j durch Addition eines Elements von W) können wir die unbekannten Eintragungen $*$ eliminieren.

Zur Vereinfachung der Notation wollen wir dies nur für den ersten Jordan-Block für N' zeigen. Wir nehmen an, dieser hat Dimension m, also

$$f_j + W = N^{m-j} f_m + W \quad \text{für } j = 1, \dots, m-1 \text{ (und } m)$$

~~O.B.d.A können wir f_m vorerst fest wählen und f_j durch $f_j = N^{m-j} f_m$ für $j = 1, \dots, m-1$ definieren.~~

Des Weiteren haben wir

$$N^m f_m + W = 0 + W,$$

oder äquivalenterweise

$$N^m f_m = c_1 e_1 + \dots + c_k e_k \quad (*)$$

für gewisse $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$.

Behauptung $c_k = c_{k-1} = \dots = c_{k-m+1} = 0$

Denn $N^{m-1} f_m \neq 0$, weswegen $m-1 < k$ oder $m \leq k$ gelten muss. Wenden wir N^{k-m} auf $N^m f_m$ an, erhalten wir wegen $(*)$

$$\underset{\text{da } N^k = 0}{0 =} N^k f_m = N^{k-m}(c_1 e_1 + \dots + c_k e_k)$$

$$= c_{k-m+1} e_1 + \dots + c_k e_m$$

Da $e_1, \dots, e_m$ l.u. sind, erhalten wir die obige Behauptung.

Im Extremfall $m = k$ haben wir $N^m f_m = 0$ sogar in V und nicht nur in V/W. Falls $m < k$ verwenden wir nun die Behauptung um einen besseren Repräsentanten von $f_m + W$

zu definieren. Wir definieren

$$e_{k+m} = f_m - (c_1 e_{m+1} + c_2 e_{m+2} + \dots + c_{k-m} e_k)$$

$$e_{k+m-1} = N e_{k+m}$$

$$e_{k+m-2} = N^2 e_{k+m}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$e_{k+1} = N^{m-1} e_{k+m} \to !$$

und berechnen

$$N^m e_{k+m} = N^m f_m - N^m (c_1 e_{m+1} + \dots + c_{k-m} e_k)$$

$$= \underbrace{(c_1 e_1 + \dots + c_{k-m} e_{k+m})}_{\text{wegen } \circledast \text{ \& Beh}} - \underbrace{(c_1 e_1 + \dots + c_{k-m} e_{k-m})}_{\substack{\text{wegen } N|_W \\ \text{hat bereits} \\ \text{Jordan-Struktur} \\ \text{bzgl. } e_1, \dots, e_k}}$$

$$= 0$$

D.h. wir können die $*$ über dem zweiten Block mit einer geschickten Korrektur der Repräsentanten eliminieren.

Wir wiederholen das Argument für alle weiteren Blöcke und erhalten eine Jordan-Normalform.

$\square$

Für den Beweis der Eindeutigkeit verallgemeinern wir die Aussage über die geometrische Vielfachheit, wobei wir uns auf den nilpotenten Fall beschränken.

Sei V ein endl.-dim V.R über $\mathbb{K}$

<u>Lemma</u> Sei $N \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent.

Dann gilt

$\dim \ker N = \#$ Jordanblöcke

$\dim \ker N^2 = \#$ Jordanblöcke
$\quad + \#$ Jordanblöcke mit Dim ≥ 2

$\dim \ker N^3 = \#$ Jordanblöcke
$\quad + \#$ J-blöcke mit Dim ≥ 2
$\quad + \#$ J-blöcke mit Dim ≥ 3

$\vdots$

<u>Bewskizze</u> Für einen Jordanblock $N = J_{0,n}$ gilt

$$\dim \ker N^k = \dim \ker \begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k} & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} = k$$

für $k \leq n$

und $\dim \ker N^k = n$ für $k > n$.

Für eine allgemeine nilpotente Abbildung mit Matrixdarstellung in Jordan-Normalform können wir dies mit dem Argument für die geometrische Vielfachheit verknüpfen um das Lemma zu beweisen

$\square$

Bew-Skizze für Eindeutigkeit

Ang. J und J' sind zwei Jordan-Normalformen von $T \in End(V)$. Dann gilt

$$p_J(x) = p_T(x) = p_{J'}(x),$$

wobei

$$p_J(x) = \prod_\lambda (\lambda - x)^{\#\text{der } \lambda \text{ in Diagonale von } J}.$$

Dies zeigt, dass jeder λ mit derselben Vielfachheit in J & J' vorkommen muss

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert. Dann gilt wegen dem Lemma, dass mit

Jordan-Blöcke für λ

J-Blöcke + # J-Blöcke mit $Dim \geq 2$

⋮

⋮

$$\sum_{j=1}^{k} \#\text{J-Blöcke für } \lambda \text{ mit Dim.} \geq j$$

durch Dimensionen von durch T definierte Teilräume ausdrücken können. Dies gilt dann auch für

$$\#\text{J-Blöcke für } \lambda \text{ mit Dim} \geq k$$

und dann auch für

$$\#\text{J-Blöcke für } \lambda \text{ mit Dim} = k.$$

Da dies sowohl für J als auch für J' gilt, tauchen in J & J' dieselben Blöcke auf. $\square$