Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 14

Determinante

1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{R}$ und über dem Körper $\mathbb{F}_5$. Ist B invertierbar?

Lösung: Wir entwickeln nach der ersten Spalte:

$$\det(B) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei der linken Determinante entwickeln wir nach der letzten Spalte, das gibt $(-3) \cdot -8 = 24$, bei der rechten Determinante nach der ersten Spalte, das gibt $1 \cdot (-27) - 2 \cdot (6 - 4 + 9)$, also

$$\det(B) = 81 + 2(-27 + 14) = 55.$$

Daraus folgt dass B über $\mathbb{R}$ invertierbar ist, aber nicht über $\mathbb{F}_5$.

2. Jeder der folgenden Ausdrücke definiert eine Funktion D auf der Menge der 3×3 Matrizen über $\mathbb{R}$. In welchen dieser Fälle ist D eine 3-lineare Funktion?

   (a) $D(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$;

   (b) $D(A) = A_{11}^2 + 3A_{11}A_{22}$;

   (c) $D(A) = A_{11}A_{12}A_{33}$;

   (d) $D(A) = A_{13}A_{22}A_{32} + 5A_{12}A_{22}A_{32}$;

   (e) $D(A) = 0$;

   (f) $D(A) = 1$.

Lösung: Seien

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen stellen Gegenbeispiele für (a), (b), (c) und (f) dar. In allen Fällen müsste $D(B_1) = 2D(B_2)$ gelten, wenn die Abbildung linear in der ersten Zeile wäre. Somit ist ein Gegenbeispiel zu (a) gegeben durch

$$D(B_2) = 4 \neq 6 = 2(1+1+1) = 2D(B_1).$$

Ein Gegenbeispiel für (b) ist

$$D(B_2) = 10 \neq 8 = 2(1 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = 2D(B_1).$$

Ein Gegenbeispiel für (c) ist

$$D(B_2) = 4 \neq 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2D(B_1).$$

Ein Gegenbeispiel für (f) ist

$$D(B_2) = 1 \neq 2 = 2D(B_1).$$

Somit ist D in diesen Fällen **nicht** 3-linear.

Sei nun A eine beliebige Matrix mit Zeilen R_i, $i = 1, 2, 3$. Des Weiteren betrachten wir $D(A) = D(R_1, R_2, R_3)$ als eine Funktion der Zeilen von reellen 3×3 Matrizen. Sei $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n$ ein Zeilenvektor und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Im Fall (d) gilt dann

$$\begin{aligned} D(\lambda R_1 + \alpha, R_2, R_3) &= (\lambda A_{13} + \alpha_3) A_{22} A_{32} + 5(\lambda A_{12} + \alpha_2) A_{22} A_{32} \\ &= \lambda (A_{13} A_{22} A_{32} + 5 A_{12} A_{22} A_{32}) + (\alpha_3 A_{22} A_{32} + 5\alpha_3 A_{22} A_{32}) \\ &= \lambda D(R_1, R_2, R_3) + D(\alpha, R_2, R_3). \end{aligned}$$

Somit ist D linear in der ersten Zeile, ähnliche Rechnungen zeigen, dass D auch in der zweiten und dritten Zeile linear ist. Somit ist D 3-linear.

Schliesslich gilt für (e)

$$D(\lambda R_1 + \alpha, R_2, R_3) = 0 = \lambda \cdot 0 + 0 = \lambda D(R_1, R_2, R_3) + D(\alpha, R_2, R_3),$$

also ist D linear in der ersten Zeile. Ähnliche Rechnungen zeigen, dass D auch linear in der zweiten und dritten Zeile ist. Zusammen ist D in diesem Fall 3-linear.

3. (a) Sei K ein Körper und $\lambda \in K$, und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Zeige:

   i. Sei B, so dass $A \xrightarrow{\lambda L_i \to L_i} B$. Dann gilt $\det B = \lambda \det A$;

ii. Sei B, so dass $A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} B$. Dann gilt $\det B = -\det A$;

iii. Sei B, so dass $A \xrightarrow{\lambda L_i + L_j \to L_j} B$ mit $i \neq j$. Dann gilt $\det B = \det A$.

(b) Die Zahlen 2014, 1484, 3710 und 6996 sind alle durch 106 teilbar. Zeige ohne zu rechnen, dass auch

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

durch 106 teilbar ist.

Lösung:

(a) Dies ist Prop. 4.2.3. der Vorlesungsnotizen.

(b) Wir addieren $(1000 \times (1.\ \text{Zeile}) + 100 \times (2.\ \text{Zeile}) + 10 \times (3.\ \text{Zeile}))$ zur 4. Zeile. Wir ändern die Determinante dadurch nicht und erhalten:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 1 & 9 \\ 2014 & 1484 & 3710 & 6996 \end{pmatrix}.$$

Da jeder Eintrag in der letzten Zeile durch 106 teilbar ist, gilt

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 1 & 9 \\ 2014 & 1484 & 3710 & 6996 \end{pmatrix} = 106 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 1 & 9 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_4$. Da die Determinante einer Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ wieder in $\mathbb{Z}$ liegt, folgt die Aussage.

4. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Durch Anwenden des Gaussverfahrens erhält man

$$\begin{aligned}\det(A) &= -4\\ \det(B) &= 0\\ \det(C) &= 24.\end{aligned}$$

Alternativ kann man für B direkt erkennen, dass die erste Spalte eine Linearkombination der dritten und fünften Spalte ist und daher $\det(B) = 0$ ist.

5. Sei $A_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie:

$$\det(A_n) = n + 1.$$

Lösung: Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n. Für $n = 1, 2$ erhalten wir

$$\det(A_1) = 2, \det(A_2) = 4 - 1 = 3$$

gemäß unserer Behauptung. Wir nehmen also an, dass $n > 2$ und die Aussage ist für alle $n' < n$ gezeigt. Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$\det(A_n) = 2 \cdot \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}) = 2n - (n - 1) = n + 1.$$

Hierbei wurde die Induktionsvoraussetzung verwendet, und für den zweiten Summanden wurde nach der ersten Zeile entwickelt.

6. Sei K ein Unterkörper der komplexen Zahlen und n eine positive ganze Zahl. Seien ausserdem $j_1, \dots, j_n$ und $k_1, \dots, k_n$ positive ganze Zahlen, welche nicht grösser als n sind. Definiere für jede $n \times n$ Matrix A über K

$$D(A) = A(j_1, k_1)A(j_2, k_2) \cdots A(j_n, k_n).$$

Zeige, dass D genau dann n-linear ist, wenn $j_1, \dots, j_n$ paarweise unterschiedlich sind.

Lösung: Wir nehmen an, dass $j_r = j_s$ für ein $r \neq s$ erfüllt ist und zeigen, dass D in diesem Fall nicht n-linear ist. Sei B eine Matrix, welche wir durch Multiplikation der j_r-ten Zeile von A mit $\lambda \in K$ erhalten. Dann ist

$$\begin{aligned} D(B) &= \prod_{\substack{i=1 \\ j_i \neq j_r}}^{n} A(j_i, k_i) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ j_k = j_r}}^{n} (\lambda A(j_r, k_r)) \\ &= \lambda^m D(A), \end{aligned}$$

wobei $m \geqslant 2$ die Anzahl der Indizes s ist, für die $j_s = j_r$ gilt. Im Allgemeinen ist $\lambda^m D(A) \neq \lambda D(A)$, zum Beispiel für $\lambda = 2$ und nicht-triviale Matrixeinträge. Also ist D nicht n-linear.

Note. Im Fall $K = \mathbb{F}_2$, dem Körper mit 2 Elementen, sind die Elemente genau das neutrale Element 0_K und das multiplikativ neutrale Element 1_K. Aus den Körperaxiomen folgt dann(nachrechnen!) $\forall m \geqslant 1 : 0_K^m = 0_K$, und $\forall m \geqslant 0 : 1_K^m = 1_K$. Also wäre die Abbildung D in diesem Fall n-linear. Alerdings ist $\mathbb{F}_2$ kein Teilkörper von $\mathbb{C}$ (um zu sehen wieso nicht, versuche einen injektiven Körperhomomorphismus von $\mathbb{F}_2$ nach $\mathbb{C}$ anzugeben), ist das hier nicht relevant.

Nehme jetzt an, dass die j_i paarweise verschieden sind. Seiein $\lambda \in K$ und $1 \leqslant r \leqslant n$ und $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset K$. Sei ausserdem B die Matrix, welche wir durch Multiplikation der j_r-ten Zeile von A mit λ erhalten und zu dieser danach den Zeilenvektor $(\alpha_i)_{i=1}^n$ addieren. Wir berechnen

$$\begin{aligned} D(B) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} A(j_i, k_i) \cdot (\lambda A(j_r, k_r) + \alpha_{k_r}) \\ &= \lambda D(A) + D(C), \end{aligned}$$

wobei C die Matrix ist, welche wir durch vertauschen der j_r-ten Zeile A mit $(\alpha_i)_{i=1}^n$ erhalten. Daraus folgt die n-Linearität von D.

Single Choice. Pro Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1$?

   (a) $x = -2$

   ✓(b) $x = 2$

   (c) $x = -1$

   (d) $x = 1$

   Erklärung: Die Determinante der Matrix ist $(x-1)^2$, woraus Antwort (b) folgt.

2. Sei K ein Körper und $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über K. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Eine quadratische Matrix A über K ist invertierbar genau dann wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

   (b) Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix hängt nur von den Diagonaleinträgen ab.

   ✓(c) Für jedes $n \geqslant 0$ ist die Determinante $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ eine lineare Abbildung.

   (d) Für jedes $n > 0$ ist die Determinantenabbildung $\mathrm{Mat}\ _{n\times n}(K) \to K$ surjektiv.

   Erklärung: Die Determinante $\det(A)$ ist zwar linear in jeder einzelnen Zeile oder Spalte, wenn die übrigen Zeilen bzw. Spalten festgehalten werden, jedoch nicht linear in A selbst. Zum Beispiel gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, was im Allgemeinen verschieden von $\lambda \det(A)$ ist. Darum ist (c) falsch.

   Dafür wurden (a) und (b) in der Vorlesung bewiesen, und (d) gilt, da die Matrix, die aus der Einheitsmatrix entsteht, indem man den linken oberen Eintrag durch $\lambda \in K$ ersetzt, die Determinante λ hat.

3. Unter welcher Operation bleibt die Determinante einer Matrix im Allgemeinen nicht gleich?

   ✓(a) Vertauschen zweier Zeilen.

   (b) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

   (c) Transponieren.

   (d) Ersetzen durch eine ähnliche Matrix.

   Erklärung: Das Vertauschen zweier Zeilen führt zu einer Umkehr des Vorzeichens der Determinante.

Multiple Choice Fragen.

1. Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Matrizen A und B aus $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $n \geqslant 2$ korrekt?

   ✓ (a) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

   ✓ (b) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $a_1, \cdots, a_n$ von A linear unabhängig sind.

   ✓ (c) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

   (d) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

   (e) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

2. Sei $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 4$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

   (a) $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 8$.

   ✓ (b) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = 4$.

   ✓ (c) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = 4$.

   ✓ (d) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 12$.

   Erklärung: Aussage (a) ist falsch, denn

$$\det\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 2^2 \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2^2 \cdot 4 = 16.$$

   Aussage (b) ist richtig, denn

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 4.$$

   Aussage (c) ist richtig, denn

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 4.$$

   Aussage (d) ist richtig. Es folgt aus der Multilinearität der Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 12.$$