D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2022

Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 15

Determinante

1. Sei K ein kommutativer Ring mit 1. Für eine 2×2 Matrix A über K ist die Adjunkte von A die 2×2 Matrix $\operatorname{adj} A$ gegeben durch

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

Sei ausserdem det die eindeutige Determinantenfunktion auf 2×2 Matrizen über K. Zeige:

(a) $(\operatorname{adj} A)A = A(\operatorname{adj} A) = (\det A)I$;

(b) $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)$;

(c) $\operatorname{adj}(A^t) = (\operatorname{adj} A)^t$.

(A^t ist die Transponierte von A.)

Lösung: Die obigen Gleichungen können alle durch eine direkte Rechnung gezeigt werden.

2. (a) Liste explizit alle 24 Permutationen von Grad 4 auf, gebe an, welche ungerade und welche gerade sind, und nutze dies um die komplette Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(1, \sigma 1) \cdots A(n, \sigma n)$$

für die Determinante einer 4×4 Matrix konkret anzugeben. Bemerke, dass im Fall $n \geqslant 4$ die Betrachtung einer Kombination von Diagonalen nicht genug ist, um ihre Determinante zu bestimmen.

(b) Wie viele *geraden* Permutationen sind für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ in S_n enthalten?

Lösung:

Notation. Wir schreiben $(a_1 a_2 \cdots a_r)$ für den Zykel der Länge r, welcher a_1 auf a_2, a_2 auf a_3, ..., a_{r-1} auf a_r, und a_r auf a_1 abbildet. Wenn σ_1, σ_2 zwei Zykel sind, schreiben wir $\sigma_2 \sigma_1$ für deren Komposition.

(a) Wir zählen wie viele Permutationen welchen Typs wir haben. Dazu bestimmen wir, welche von diesen gerade oder ungerade sind, indem wir die Anzahl der Inversionen wie in Abschnitt 4.3 des Skriptes erklärt. Im Folgenden werden ungerade Permutationen mit Asterisk gekennzeichnet.

- Es gibt $\binom{4}{2} = 6$ Transpositionen: $(12)^*, (13)^*, (14)^*, (23)^*, (24)^*, (34)^*$;
- Es gibt $\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3} = 8$ 3-Zykel: $(123), (213), (124), (214), (234), (324), (134), (314)$;
- Es gibt $\frac{4!}{4} = 6$ 4-Zykel: $(1234)^*, (1342)^*, (1243)^*, (1324)^*, (1432)^*, (1423)^*$;
- Es gibt $\frac{6}{2} = 3$ Produkte von 2 Transpositionenen, welche weder 3-Zykel noch 4-Zykel sind: $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$. Bemerke, dass diese Elemente Ordnung 2 haben und deswegen weder 3-Zykel noch 4-Zykel sind.
- Ausserdem gibt es die triviale Permutation.

Die Leibnizformel ergibt

$$\begin{aligned}
\det A = &- a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \\
&- a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \\
&+ a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\
&+ a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} \\
&- a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} \\
&+ a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.
\end{aligned}$$

(b) Im Fall $n = 1$ ist $S_1 = \{\mathrm{id}\}$. Also ist die Zahl der geraden Permutationen dann 1.

Für $n \geqslant 2$ zeigen wir, dass S_n genauso viele gerade wie ungerade Permutationen hat, indem wir zwischen eine Bijektion zwischen der Menge der ungeraden und der Menge der geraden Permutationen angeben. Sei $\sigma \in S_n$ und betrachte $(\sigma(1)\,\sigma(2)) \circ \sigma$. Dann ist

$$((\sigma(1)\,\sigma(2)) \circ \sigma)(i) = \begin{cases} \sigma(i), & i \in \{3, \dots, n\} \smallsetminus \{1, 2\} \\ \sigma(1), & i = 2 \\ \sigma(2), & i = 1 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\operatorname{sgn}((\sigma(1)\,\sigma(2)) \circ \sigma) = \operatorname{sgn}((\sigma(1)\,\sigma(2))) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma).$$

Also definiert die Multiplikation mit $(\sigma(1)\,\sigma(2))$ eine Abbildung

$$\begin{aligned}
\varphi : \{\text{gerade Permutationen in } S_n\} &\to \{\text{ungerade Permutationen in } S_n\} \\
\sigma &\mapsto (\sigma(1)\,\sigma(2)) \circ \sigma
\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist ihr eigenes Inverses und somit teilt sich S_n in zwei gleich grosse Mengen der geraden/ungeraden Permutationen. Also gibt es $n!/2$ gerade Permutationen.

Aliter: Wir zeigen durch Induktion, dass S_n für $n \geqslant 2$ genau $\frac{n!}{2}$ gerade Permutationen enthält. Bemerke zunächst, dass S_2 genau $1 = \frac{|S_2|}{2}$ gerade Permutation (die Identität) und $1 = \frac{|S_2|}{2}$ ungerade Permutation (die einzige nicht-trivale) enthält.

Sei nun $n > 2$. Sei ausserdem $\sigma \in S_n$ und schreibe a_i für das Bild von $\sigma(i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$((a_n n) \circ \sigma)(i) = \begin{cases} a_i, & i \neq n \wedge a_i \neq n \\ n, & i = n \\ a_n, & a_i = n \end{cases}$$

Also kann die Permutation $(a_n n) \circ \sigma$ als Element $\tilde{\sigma}$ von S_{n-1} angesehen werden, für das gilt

$$\sigma = (a_n n) \circ \tilde{\sigma}.$$

Diese Gleichheit zeigt, dass $\tilde{\sigma}$ durch die Wahl von σ eindeutig bestimmt ist. Also können wir eine Abbildung wie folgt definieren

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S_n & \rightarrow & S_{n-1} \\ & \sigma & \mapsto & \varphi(\sigma), \quad \text{so dass } (a_n\, n) \circ \sigma = \varphi(\sigma). \end{array}$$

Diese Abbildung ist surjektiv. Tatsächlich können wir jedes $\tau \in S_{n-1}$ als ein Element σ von S_n ansehen, welches n auf n schickt. Dann ist

$$\tau = (n\, n) \circ \sigma \implies \tau = \varphi(\sigma).$$

Ausserdem ist die Abbildung n-zu-1 da für jedes $\tau \in S_{n-1}$, und für jedes $a_n \in \{1, \ldots, n\}$, die Permutation $(a_n\, n)\tau \in S_n$ im Urbild von τ liegt.

Schliesslich bemerken wir, dass jede gerade Permutaiton $\tau \in S_{n-1}$ genau $n - 1$ *ungerade* Urbilder und ein *gerades* Urbild (welches jene Permutation ist, welche wir erhalten, wenn wir τ als ein Bild von S_n ansehen) und jede ungerade Permutation $\tau \in S_{n-1}$ genau $n-1$ *gerade* Urbilder und ein *ungerades* Urbild hat. Mit der Induktionshypothese folgt also, dass S_n genau

$$\frac{(n-1)!}{2} \cdot 1 + \frac{(n-1)!}{2} \cdot (n-1) = \frac{n!}{2}$$

gerade Permutationen hat.

Aliter:Wir haben gezeigt, dass $\operatorname{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ ein Gruppenhomomorphismus ist (die Gruppenoperation auf der Rechten Seite ist durch Multiplikation definiert). Aus dem ersten Isomorphiesatz folgt

$$S_n / \ker(\operatorname{sgn}) \cong \{-1, 1\}.$$

Da alle involvierten Gruppen endlich sind, haben sie die gleiche Anzahl von Elementen und es gilt

$$2 = \left| S_n / \ker(\operatorname{sgn}) \right| = \frac{|S_n|}{|\ker(\operatorname{sgn})|} = \frac{n!}{|\ker(\operatorname{sgn})|}.$$

Per Definition ist $\ker(\operatorname{sgn})$ die Gruppe der geraden Permutationen. Also gibt es $\frac{n!}{2}$ gerade Permutationen.

3. Eine $n \times n$ Matrix A heisst trigonal oder Dreiecksmatrix, wenn $A_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt oder wenn $A_{ij} = 0$ für $i < j$ gilt. Zeige, dass die Determinante einer trigonalen Matrix durch das Produkt $A_{11}A_{22} \cdots A_{nn}$ seiner diagonalen Einträge gegeben ist.

   Lösung: Sei A eine obere Dreiecksmatrix. Die Leibnizformula liefert

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A(i, \sigma(i)).$$

   Da A eine obere Dreiecksmatrix ist verschwindet für eine Permutation $\sigma \in S_n$, für die ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert mit $\sigma(i) < i$, das obige Produkt. Also betrachten wir lediglich solche Permutationen σ für die $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \sigma(i) \geqslant i$ gilt.

   Nehme an, dass für eine solche Permutation ein Index $i \in \{2, \ldots, n\}$ existiert mit $\sigma(i) > i$, und sei i_0 der kleinste Index mit dieser Eigenschaft. Dann bildet σ die Menge $\{i_0, \ldots, n\}$ auf $\{i_0+1, \ldots n\}$ ab. Dies ist ein Widerspruch, da σ eine bijektive Abbildung ist. Also kann eine solche Permutation nicht existieren und wir folgern

$$\begin{aligned} \det A &= \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) \prod_{i=1}^{n} A(i,i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} A(i,i). \end{aligned}$$

   Aliter: Wir zeigen dies per Induktion n für obere Dreiecksmatrizen. Für $n = 1$ ist die Aussage erfüllt. Für $n = 2$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} A(1,1) & A(1,2) \\ 0 & A(2,2) \end{pmatrix} = A(1,1)A(2,2).$$

   Nehme nun an, dass die Aussage für jede obere Dreiecksmatrix der Grösse $n - 1$ gilt, wobei $n > 1$ ist. Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} A(1,1) & A(2,2) & \cdots & A(1,n) \\ 0 & A(2,2) & \cdots & A(2,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A(n,n) \end{pmatrix}$$

   Wir berechnen $\det A$, indem wir nach der ersten Zeile entewickeln und unsere Induktionsvoraussetzung benutzen

$$\begin{aligned} \det A = (-1)^2 A(1,1) \cdot \det &\begin{pmatrix} A(2,2) & A(2,3) & \cdots & A(2,n) \\ 0 & A(3,3) & \cdots & A(3,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A(n,n) \end{pmatrix} \\ = \prod_{i=1}^{n} A(i,i). \end{aligned}$$

4. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Zeige

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Bemerkung: Produkte dieser art werden *Vandermonde Determinanten* genannt und die obige Matrix wird *Vandermonde matrix* genannt.

Lösung: Wir beweisen die Formel durch Induktion. Für $n = 2$ ist die Formel erfüllt, da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1$$

gilt. Betrachte nun die n-te Vandermonde Matrix, kurz V_n, und nehme an, dass die Formel für die $n-1$-te Determinante bereits bewiesen ist. Wir substrahieren die erste Zeile von jeder anderen Zeile, was die Determinante nicht ändert, und entwickeln dann nach der ersten Spalte und erhalten

$$\begin{aligned} \det V_n &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Erinnerung: es gilt die Formel

$$x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-2} + y^{m-1}).$$

Für jedes $i \in \{2, \ldots, n\}$, faktorisieren wir die $i-1$-te Zeile durch $(x_i - x_1)$ und nutzen n-Linearität der Determinante um diesen Faktor herauszuziehen. Wir erhalten

$$\det V_n = \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_1^k x_2^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_1^k x_n^{n-2-k} \end{pmatrix}.$$

Bemerke, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^{n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^m \\ x_1^{m-1} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{m} x_1^k x_i^{m-k}.$$

Also kann die letzte Matrix als das Produkt der Vandermonde Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

mit der oberen Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 0 & 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Wir benutzen die Induktionshypothese zusammen mit der Multiplikativität der Determinante und erhalten

$$\begin{aligned} \det V_n &= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \cdot \prod_{2 \leqslant j < k \leqslant n-1} (x_k - x_j) \cdot 1 \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_j - x_i. \end{aligned}$$

5. Sei K ein Körper und seien $A, B, C, D \in M_{n \times n}(K)$. Nehme ausserdem an, dass A und C kommutieren und $\det A \neq 0$ ist. Zeige

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \det(A \cdot D - C \cdot B)$$

Hinweis. Betrachte die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & O_n \\ \hline -C & A \end{array} \right).$$

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} I_n & O_n \\ \hline -C & A \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -C \cdot A + A \cdot C & -C \cdot B + A \cdot D \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O_n & -C \cdot B + A \cdot D \end{array} \right), \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass A und C kommutieren, um die letzte Gleichheit zu erhalten. Aus der Multiplikativität der Determinante und einem Resultat aus der Vorlesung über Blockmatrizen dieser Form folgt

$$\begin{aligned} & \det(I_n) \det(A) \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \det(A) \det(A \cdot D - C \cdot B) \\ \iff \quad & \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \det(A \cdot D - C \cdot B). \end{aligned}$$

6. Beweise die folgende Proposition durch Benutzung der Leibniz-Formel:

Proposition. *Sei K ein Körper und seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Dann ist*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Hint. Bezeichne mit $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ die Standardbasis von K^n und schreibe die Matrix B als Liste von Spaltenblöcken:

$$B = \left(\textstyle\sum_{s_1=1}^n B(s_1, 1)\mathbf{e}_{s_1} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \sum_{s_n=1}^n B(s_n, n)\mathbf{e}_{s_n} \right).$$

Du musst auch das folgende Lemma beweisen:

Lemma. Für alle $A \in M_{n\times n}(K)$ und alle $\sigma \in S_n$ gilt

$$\det\left(A \cdot \mathbf{e}_{\sigma(1)} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; A \cdot \mathbf{e}_{\sigma(n)} \right) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A).$$

Lösung: Wir schreiben die Matrix B als Liste von Spaltenblöcken

$$B = \left(\textstyle\sum_{s_1=1}^n B(s_1, 1)\mathbf{e}_{s_1} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \sum_{s_n=1}^n B(s_n, n)\mathbf{e}_{s_n} \right).$$

Wir können so auch das Produkt $A \cdot B$ als Liste von Spaltenblöcken schreiben

$$A \cdot B = \left(\textstyle\sum_{s_1=1}^n B(s_1, 1)A \cdot \mathbf{e}_{s_1} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \sum_{s_n=1}^n B(s_n, n)A \cdot \mathbf{e}_{s_n} \right).$$

Um die Determinante zu berechnen, entwickeln wir nach jeder Spalte

$$\det(AB) = \sum_{s_1=1}^n \cdots \sum_{s_n=1}^n \left(\prod_{i=1}^n B(s_i, i) \right) \det\left(A \cdot \mathbf{e}_{s_1} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; A \cdot \mathbf{e}_{s_n} \right)$$

Bemerke, dass falls für ein $i \neq j : s_i = s_j$ gilt, die s_i-te Spalte von A mehrere Male in der letzten Matrix vorkommt. Also verschwindet die Determinante in diesem Fall. Also müssen wir nur die Tupel $(s_1, \ldots, s_n)$ betrachten, für die $i \mapsto s_i$ eine Bijektion ist. Solche Tupel korrespondiren 1-zu-1 zu den Permutationen von S_n, also können wir die letzte Gleichung schreiben als

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^n B(\sigma(i), i) \right) \det\left(A \cdot \mathbf{e}_{\sigma(1)} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; A \cdot \mathbf{e}_{\sigma(n)} \right). \tag{1}$$

Wir benutzen das folgende Resultat um den Beweis zu beenden:

Lemma 1. *Für alle $A \in M_{n\times n}(K)$ und alle $\sigma \in S_n$ gilt*

$$\det\left(A \cdot \mathbf{e}_{\sigma(1)} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; A \cdot \mathbf{e}_{\sigma(n)} \right) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A).$$

Beweis. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass jede Permutation das Produkt von Transpositionen ist. Wir beweisen das Lemma per Induktion über die Zahl r der minimalen Transpositionen in einer Dekomposition von σ. Nehme zunächst an, dass σ eine Transposition ist. Dann invertiert σ genau 2 Spalten von A. Also ist, wie wir in der letzen Serie gesehen haben

$$\det \left(\begin{array}{c|c|c} A \cdot \mathbf{e}_{\sigma(1)} & \cdots & A \cdot \mathbf{e}_{\sigma(n)} \end{array} \right) = -\det A.$$

Nehme nun an, dass σ das Produkt von $r > 1$ Transpositionen ist und schreibe $\sigma = \tau_r \tau_{r-1} \ldots \tau_1$. Schreibe σ_1 für $\tau_{r-1} \cdots \tau_1$. Es gilt

$$\det \left(\begin{array}{c|c|c} A \cdot \mathbf{e}_{\sigma(1)} & \cdots & A \cdot \mathbf{e}_{\sigma(n)} \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c|c} A \cdot \mathbf{e}_{\tau_r\sigma_1(1)} & \cdots & A \cdot \mathbf{e}_{\tau_r\sigma_1(n)} \end{array} \right).$$

Da τ_r zwei Spalten von $\left(\begin{array}{c|c|c} A \cdot \mathbf{e}_{\sigma_1(1)} & \cdots & A \cdot \mathbf{e}_{\sigma_1(n)} \end{array} \right)$ permutiert, folgt

$$\det \left(\begin{array}{c|c|c} A \cdot \mathbf{e}_{\tau_r\sigma_1(1)} & \cdots & A \cdot \mathbf{e}_{\tau_r\sigma_1(n)} \end{array} \right) = -\left(\begin{array}{c|c|c} A \cdot \mathbf{e}_{\sigma_1(1)} & \cdots & A \cdot \mathbf{e}_{\sigma_1(n)} \end{array} \right)$$

Somit folgt mit der Induktionshypothese das Lemma. $\square$

Wir setzen das gerade erhaltene Resultat in (1) ein und erhalten0

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(A) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} B(\sigma(i), i) \right) \\ &= \det(A) \det(B). \end{aligned}$$