D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2023

Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 16

Charakteristisches Polynom, Eigenvektoren und Eigenwerte

1. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.

   (a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

   (b) Bestimme die Eigenwerte von A.

   (c) Die *geometrische Vielfachheit* eines Eigenwertes ist die Dimension seines Eigenraumes. Die *arithmetische Vielfachheit* eines Eigenwerts ist die Vielfachheit des Eigenwerts als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Bestimme die arithmetischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

Lösung:

(a) Wir berechnen mit der Determinantenformel für 3×3-Matrizen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{char}_A(X) = \det(X \cdot I_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} X-3 & 0 & 2 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X-1 \end{pmatrix} \\
&= (X-3)X(X-1) + 4 + 2(X-3) \\
&= X^3 - 4X^2 + 5X - 2.
\end{aligned}$$

(b) Da das Polynom normiert ist und Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ hat, sind alle Nullstellen in $\mathbb{Q}$ schon in $\mathbb{Z}$ und Teiler des konstanten Koeffizienten -2 . Probieren liefert die Nullstelle $X = 1$. Mit Polynomdivision und erneutem Raten (oder dann der Mitternachtsformel) folgt

$$\operatorname{char}_A(X) = (X-1)\left(X^2 - 3X + 2\right) = (X-1)^2(X-2).$$

Daher sind die Eigenwerte $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := 2$.

(c) Die arithmetische Vielfachheit ist die Vielfachheit der Eigenwerte als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Deshalb ist die arithmetische Vielfachheit von λ_1 gleich 2 und von λ_2 gleich 1. Die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des Eigenraumes. Für den Eigenwert λ_1 betrachte die Matrix

$$\lambda_1 \cdot I_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang 2, weil die ersten beiden Spalten linear unabhängig sind und die letzte Spalte gleich minus der ersten Spalte ist. Der Kern der zugehörigen linearen Abbildung hat also die Dimension $3 - 2 = 1$. Somit ist die geometrische Vielfachheit von λ_1 gleich 1 . Da der Eigenwert λ_2 die arithmetische Vielfachheit 1 hat, ist die geometrische Vielfachheit $\leqslant 1$ und > 0, also ebenfalls gleich 1 . Aliter: Für den Eigenwert λ_2 betrachte die Matrix

$$\lambda_2 \cdot I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat ebenfalls Rang 2; somit ist die geometrische Vielfachheit von λ_2 ebenfalls $3 - 2 = 1$.

2. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ und überprüfe, ob die Matrizen diagonalisierbar sind.

   (a) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $C := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   (a) Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

   $$\mathrm{char}_A(X) = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$$

   und damit die Eigenwerte 2 und 3 , jeweils mit der arithmetischen Vielfachheit 1. Die Eigenräume $E_{\lambda,A}$ zum Eigenwert λ sind

   $$E_{2,A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{3,A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   Da für jeden Eigenwert von A die geometrische Vielfachheit mit der arithmetischen Vielfachheit übereinstimmt, ist A diagonalisierbar.

   (b) Die Matrix B hat das charakteristische Polynom

   $$\mathrm{char}_B(X) = X^3 - 5X^2 + 2X + 8 = (X - 4)(X - 2)(X + 1).$$

und damit die Eigenwerte 4,2,-1, jeweils mit der arithmetischen Vielfachheit 1. Die Eigenräume sind

$$E_{4,B} = \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{2,B} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{-1,B} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da für jeden Eigenwert von B die geometrische Vielfachheit mit der arithmetischen Vielfachheit übereinstimmt, ist B diagonalisierbar.

(c) Die Matrix C hat das charakteristische Polynom

$$\mathrm{char}_C(X) = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4 = (X-1)(X+1)(X-2)^2.$$

und damit die Eigenwerte 1, -1, 2 mit den jeweiligen arithmetischen Vielfachheiten 1, 1, 2. Die Eigenräume sind

$$E_{1,C} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{-1,C} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{2,C} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der Eigenwert 2 hat arithmetische Vielfachheit 2, aber geometrische Vielfachheit 1. Die Matrix C ist also nicht diagonalisierbar.

3. Für eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix A drücke das charakteristische Polynom von A^{-1} in Termen des charakteristischen Polynoms von A aus.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{char}_{A^{-1}}(X) &= \det\left(X \cdot I_n - A^{-1}\right) \\ &= \det\left((-X) \cdot A^{-1} \cdot \left(X^{-1} \cdot I_n - A\right)\right) \\ &= (-X)^n \det\left(A^{-1}\right) \det\left(X^{-1} \cdot I_n - A\right) \\ &= \frac{(-X)^n}{\det(A)} \cdot \mathrm{char}_A\left(X^{-1}\right). \end{aligned}$$

4. Sei K^∞ der Raum aller unendlichen Folgen in K, und sei K_0^∞ der Unterraum aller Folgen, die schliesslich Null werden.

(a) Finde alle Eigenwerte und Eigenvektoren des Endomorphismus

$$T : K^\infty \to K^\infty,\ (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

(b) Tue dasselbe für den induzierten Endomorphismus $K_0^\infty \to K_0^\infty$.

(c) Konstruiere einen Endomorphismus von K_0^∞ mit den Eigenwerten $0, 1, 2, 3, \ldots$

(d) Konstruiere einen Endomorphismus von K_0^∞, der keine Eigenwerte besitzt.

Lösung:

(a) Sei $x = (x_i)_{i \geqslant 0} \in F$ und $\lambda \in K$ beliebig mit

$$Tx = \lambda x$$

Dann gilt $\lambda x_n = x_{n+1}$ für alle $n \geqslant 0$, woraus mit Induktion $x_n = \lambda^n x_0$ für alle n folgt. Der Vektor x ist also ein Vielfaches von

$$v_\lambda := \big(1, \lambda, \lambda^2, \ldots\big) \neq 0$$

Umgekehrt ist jedes von Null verschiedene Vielfache von v_λ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ. Somit ist jeder Skalar $\lambda \in K$ ein Eigenwert von T mit dem eindimensionalen Eigenraum $\langle v_\lambda \rangle$.

(b) Sei

$$T_0 = T|_{F_0} : F_0 \to F_0$$

die Einschränkung von T auf F_0. Nach (a) ist jeder Eigenvektor zum Eigenwert λ von T_0 gleich cv_λ für $c \in K^\times$. Aber

$$cv_\lambda = (c, c\lambda, \ldots, c\lambda^n, \ldots)$$

liegt genau dann in F_0, wenn $\lambda = 0$ ist. Also hat T_0 den Eigenwert 0 mit dem Eigenraum $\langle v_0 \rangle$ hat und keine weiteren Eigenwerte.

(c) Betrachte die lineare Abbildung

$$U : F_0 \to F_0, (x_n)_{n \geqslant 0} \mapsto (n \cdot x_n)_{n \geqslant 0}$$

Für jedes $k \geqslant 0$ ist der Vektor $v_k := (\delta_{kn})_{n \geqslant 0}$ ein Eigenvektor von U zum Eigenwert k. Da die Menge $\{v_k \mid k \geqslant 0\}$ auch eine Basis von F_0 ist, gibt es bis auf skalare Vielfache keine weiteren Eigenvektoren, also auch keine anderen Eigenwerte.

(d) Betrachte die lineare Abbildung

$$M : F_0 \to F_0, (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

Sei $x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in F_0$ ein Vektor mit $Mx = \lambda x$ für ein $\lambda \in K$. Dann gilt

$$x_0 = \lambda x_1 = \cdots = \lambda^n x_n = \ldots$$

Da ein $m \geqslant 0$ existiert mit $x_k = 0$ für alle $k \geqslant m$ folgt $x_0 = x_1 = \cdots = x_m = 0$, also $x = 0$. Der Endomorphismus M hat daher keine Eigenvektoren und damit auch keine Eigenwerte.

5. Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix, das heisst eine, für die ein $m \geqslant 1$ existiert mit $A^m = O$. Zeige, dass der einzige mögliche Eigenwert von A gleich 0 ist. Wann genau ist 0 ein Eigenwert von A?

   Lösung: Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v. Dann gilt $Av = \lambda v$, und durch Induktion folgt $A^k v = \lambda^k v$ für alle $k \geqslant 0$. Nach Voraussetzung ist dann $\lambda^m v = A^m v = Ov = 0$. Wegen $v \neq 0$ folgt daraus $\lambda = 0$. Also ist $\lambda = 0$ der einzige mögliche Eigenwert von A.

   Wir zeigen, dass 0 immer ein Eigenwert von A ist. Wenn A invertierbar wäre, würde die Matrix A^m das Produkt invertierbarer Matrizen sein, was im Widerspruch zu $A^m = O$ steht. Folglich ist A nicht invertierbar. Dies impliziert, dass (die Abbildung "Linksmultiplikation mit") A einen nicht-trivialen Kernel hat und daher 0 ein Eigenwert von A ist.

   Aliter: Für $n \geqslant 1$ ist $A^0 = I_n \neq O$. Die kleinste natürliche Zahl $m \geqslant 1$ mit $A^m = 0$ erfüllt daher $A^{m-1} \neq 0$. Es gibt daher einen Vektor $v \in K^n$ mit $w := A^{m-1}v \neq 0$. Wegen

   $$Aw = A^m w = 0 \cdot w = 0$$

   ist dann w ein Eigenvektor zu A mit Eigenwert 0.

6. Seien V ein K-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeige:

   (a) Falls $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ ist und $G(v) \neq 0$, dann ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

   (b) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ die gleichen Eigenwerte.

   (c) Gib ein Gegenbeispiel zu (b) an, falls V nicht endlichdimensional ist.

   Lösung:

   (a) Sei $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ mit $G(v) \neq 0$. Dann gilt

   $$G \circ F(G(v)) = G(F \circ G(v)) = G(\lambda v) = \lambda G(v).$$

   Also ist $G(v)$ auch ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

   (b) Sei (λ, v) ein Eigenvektor-Eigenwert-Paar von $F \circ G$. Wir unterscheiden die Fälle $G(v) \neq 0$ und $G(v) = 0$.

   Wenn $G(v) \neq 0$ ist, dann ist λ gemäß (a) ein Eigenwert von $G \circ F$.

   Wenn $G(v) = 0$ ist, dann gilt $\lambda v = (F \circ G)(v) = F(0) = 0$. Also ist $\lambda = 0$ und wir müssen zeigen, dass 0 ein Eigenwert von $G \circ F$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $G \circ F$ einen nicht-trivialen Kernel hat, was genau dann der Fall ist, wenn $G \circ F$ Rang $< \dim(V)$ hat. Nun gilt aber

   $$\mathrm{rank}(G \circ F) \leqslant \min(\mathrm{rank}(G), \mathrm{rank}(F)) < \dim(V),$$

da G gemäß der Annahme ein Endomorphismus von V mit nicht-trivialem Kern ist. Daher ist 0 ein Eigenwert von $G \circ F$.

Dies zeigt, dass jeder Eigenwert von $F \circ G$ ein Eigenwert von $G \circ F$ ist. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich durch Vertauschen von G und F wie oben.

(c) Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \left\{(a_n)_{n \geqslant 0}\right\}$ der Vektorraum aller Folgen in $\mathbb{R}$. Definiere die linearen Abbildungen $F, G : V \to V$ durch

$$\begin{aligned} F &: (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_1, a_2, a_3, \ldots) \\ G &: (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_1, a_2, \ldots)\,. \end{aligned}$$

Dann ist $G \circ F$ die Identität mit dem einzigen Eigenwert 1, wohingegen $F \circ G$ wegen

$$(F \circ G)(1, 0, 0, \cdots) = (0, 0, 0, \cdots)$$

auch 0 als Eigenwert besitzt.