D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2023

Prof. M. Einsiedler

Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 17

EIGENVECTORS, EIGENVALUES

1. Sei in jedem der folgenden Fällen T_i der Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$, welcher in der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ von A_i repräsentiert wird und sei U_i der Endomorphismus von $\mathbb{C}^2$, welcher von A_i in der Standardbasis von $\mathbb{C}^2$ repräsentiert ist. Berechne für $i = 1, 2, 3$ das charakteristische Polynom von T_i und das von U_i, berechne die Eigenwerte jedes Endomorphismus, und finde für jeden Eigenwert des entsprechenden Eigenraums bestehend aus Eigenvektoren.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution: Es gilt

$$\mathrm{char}_{T_1}(X) = \mathrm{char}_{U_1}(X) = X(X-1).$$

Also haben T_1 und U_1 beide die reellen Eigenwerte 0 und 1. Rechnen gibt

$$\mathrm{Eig}_{T_1}(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad \mathrm{Eig}_{T_1}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

und gleiches für U_1, wobei der Span dann über $\mathbb{C}$ statt über $\mathbb{R}$ geht.

Im zweiten Fall ist

$$\mathrm{char}_{T_2}(X) = X^2 - 3X + 5 \in \mathbb{R}[X].$$

In $\mathbb{R}[X]$ zerfällt dieses Polynom nicht in Linearfaktoren, also hat T_2 keine Eigenvektoren. Hingegen gilt für $U_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$, dass sein charakteristisches Polynom $\mathrm{char}_{U_2}(X) \in \mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt; die Nullstellen sind $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + i\sqrt{11})$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - i\sqrt{11})$.

Wir benutzen den folgenden Trick um die Eigenvektoren zu berechnen:

Eigenvektortrick für 2×2 *Matrizen.* Sei A eine 2×2 Matrix und sei λ ein (reeller oder komplexer) Eigenwert von A. Dann

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ * & * \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor } \lambda,$$

unter der Vorraussetzung, dass die erste Zeile von $A - \lambda I_2$ nicht Null ist.

Explanation. Da λ ein Eigenwert ist, hat $A-\lambda I_2$ nicht-trivialen Kern. Daraus folgt, dass die Zeilen kolinear sind, also ist die zweite Zeile ein komplexes Vialfaches der ersten.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\alpha & \gamma\beta \end{pmatrix}, \qquad \text{für ein } \gamma \in \mathbb{C}.$$

Also ist $\left(\begin{smallmatrix} -\beta \\ \alpha \end{smallmatrix}\right)$ ein im Kern enthaltenes Element.

Wir wenden dies auf A_2 und λ_1 an und erhalten

$$A_2 - \lambda_1 I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 3 \\ * & * \end{pmatrix}$$

was impliziert, dass $\mathrm{Eig}_{U_2}(\lambda_1)$ von

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11}) \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Genauso erhalten wir, dass $\mathrm{Eig}_{U_2}(\lambda_2)$ erzeugt wird von

$$\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11}). \end{pmatrix}$$

Wir gehen bei T_3 und U_3 genauso wie bei T_1 und U_1 vor. Deren charakteristisches Polynom zerfällt in $\mathbb{R}[X]$ in Linearfaktoren :

$$\mathrm{char}_{T_3}(X) = \mathrm{char}_{U_3}(X) = X(X-2).$$

Die Eigenwerte sind also 0 und 2. Berechnungen liefern

$$\mathrm{Eig}_{T_3}(0) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad \mathrm{Eig}_{T_3}(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Gleiches gilt für U_3 über $\mathbb{C}$.

2. Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensional Vektorraum über K. Angenommen $T \in \mathrm{End}(V)$ ist invertierbar. Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in K^*$ gilt: $\mathrm{Eig}_T(\lambda) = \mathrm{Eig}_{T^{-1}}(1/\lambda)$.

   Lösung: Dies folgt direkt aus der Definition

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}_T(\lambda) &= \{v \in V \mid Tv = \lambda v\} \\ &= \{w \in V \mid w = \lambda T^{-1} w\} \\ &= \left\{ w \in V \mid \frac{1}{\lambda} w = T^{-1} w \right\} \\ &= \mathrm{Eig}_{T^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Remark. Wir haben nicht die Voraussetzung benutzt, dass V endlichdimensional ist. Tatsächlich gilt die Aussage im unendlichdimensionalen Fall und folgt aus dem selben Beweis.

3. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ der glatten (also unendlich oft differenzierbaren) Funktionen über $\mathbb{R}$ und die Abbildung

$$T: \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

Berechne die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen (Eigenfunktion sind ein Synonym zu Eigenvektoren, wenn der entsprechende Raum aus Funktionen besteht) von T.

Solution: Für $\lambda \in K$ bekommen wir eine erste Idee für die Lösung, indem wir die gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} = \lambda f(x)$$

lösen. Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(x)} \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} = \lambda \\ \Longrightarrow\quad & \int \frac{1}{f(x)} \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} \,\mathrm{d}\, x = \int \lambda \,\mathrm{d}\, x \end{aligned}$$

Indem wir auf der linken Seite u für $f(x)$ substituieren, erhalten wir $\mathrm{d}\, u = \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} \,\mathrm{d}\, x$

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{u} \,\mathrm{d}\, u = \lambda x + C, \quad C \in K \\ \Longrightarrow\quad & \log(u) = \lambda x + C \\ \Longrightarrow\quad & \log(f(x)) = \lambda x + C \\ \Longrightarrow\quad & f(x) = e^{\lambda x + C}. \end{aligned}$$

Also ist die Familie $\{f(x) = f(0)e^{\lambda x} \mid \lambda \in K\}$ eine Menge von Eigenfunktionen von T und wir vermuten, dass alle Eigenfunktionen der Form $f(x) = f(0)e^{\lambda x}$ für ein $\lambda \in K$ sind.

Um dies zu überprüfen betrachten wir eine Lösung f_0 der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} = \lambda f(x)$ und definieren die modifizierte Funktion

$$g_0(x) = e^{-\lambda x} f_0(x).$$

Jetzt ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\, g_0}{\mathrm{d}\, x}(x) &= -\lambda e^{-\lambda x} f_0(x) + \lambda e^{-\lambda x} f_0(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir folgern, dass $g_0(x)$ konstant ist, also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$g_0(x) = g_0(0) = f_0(0) \Leftrightarrow f_0(x) = f_0(0)e^{\lambda x}.$$

4. Zeige für $K = \mathbb{R}$, dass K^∞ keine abzählbare Basis besitzt

   Tipp: Benutze den Fact, dass paarweise verschiedene Eigenwerte zu einer Menge linear unabhängiger Eigenvektoren korrespondieren.

   Solution: Sei $\lambda \in K$ und betrachte die Abbildung $L_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$. Wir wenden den Verschiebungsopperator

$$S : \begin{array}{ccc} K^\infty & \to & K^\infty \\ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) & \mapsto & (a_1, a_2, a_3, \dots) \end{array}$$

   auf L_λ an und bemerken, dass (λ, L_λ) ein Eigenvektor-Eigenwert Paar für S ist. Also hat S eine überabzählbare Anzahl von Eigenwerten weil jedes $\lambda \in K$ einer ist. Wie wir des Weiteren in der Vorlesung gesehen haben, folgt daraus, dass diese Eigenwerte verschieden sind, dass die Menge $\{L_\lambda \mid \lambda \in K\}$ linear unabhängig ist. Mit Aufgabe 5 von Serie 6 folgern wir, dass K^∞ keine abzählbare Basis hat.

5. (a) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit f-invarianten Unterräumen V_i. Zeige, dass die arithmetische bzw. geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts $\lambda \in K$ von f gleich der Summe der arithmetischen bzw. geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert der Endomorphismen $f|_{V_i}$ von V_i ist.

   (b) Folgere, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $f|_{V_i}$ diagonalisierbar ist für jedes i.

   (c) Seien f und g Endomorphismen desselben endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass f und g *simultan diagonalisierbar* sind (das heisst, dass eine Basis aus simultanen Eigenvektoren für f und g existiert) genau dann, wenn sie miteinander kommutieren und separat diagonalisierbar sind.

   Tipp: Um die Rückwärtsimplikation zu beweisen, zeigen Sie zuerst, dass jeder Eigenraum von f g-invariant ist, d.h. dass g Eigenvektoren von f auf Eigenvektoren von f *im selben Eigenraum* abbildet.

   Lösung:

   (a) Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ wähle eine geordnete Basis B_i von V_i. In aufsteigender Reihenfolge zusammengesetzt ergeben diese eine geordnete Basis B von V. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich B ist dann die Blockdiagonalmatrix mit Diagonalblöcken $M_{B_i}^{B_i}(f|_{V_i})$ für $1 \leqslant i \leqslant r$. Das charakteristische Polynom von f ist deshalb das Produkt der charakteristischen Polynome von $f|_{V_i}$; das heisst, es gilt

$$\mathrm{char}_f(X) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{char}_{f|_{V_i}}(X) \tag{1}$$

Für jedes $\lambda \in K$ ist daher die arithmetische Vielfachheit von λ als Eigenwert von f gleich der Summe über $1 \leqslant i \leqslant r$ der arithmetischen Vielfachheit von λ als Eigenwert von $f|_{V_i}$.

Sodann betrachte einen beliebigen Vektor $v = v_1 + \cdots + v_r$ mit allen $v_i \in V_i$. Dann gilt $f(v) = f(v_1) + \ldots + f(v_r)$ mit allen $f(v_i) \in V_i$. Da $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ eine direkte Summe ist, gilt die Gleichung

$$f(v_1) + \ldots + f(v_r) = f(v) = \lambda v = \lambda v_1 + \cdots + \lambda v_r$$

genau dann, wenn $f(v_i) = \lambda v_i$ ist für alle i. Also gilt

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) \quad = \quad \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}_\lambda(f|_{V_i})$$

und somit

$$\dim \mathrm{Eig}_\lambda(f) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Eig}_\lambda(f|_{V_i}).$$

Daher ist die geometrische Vielfachheit von λ als Eigenwert von f die Summe über $1 \leqslant i \leqslant r$ der geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert von $f|_{V_i}$.

(b) Nach einem Satz der Vorlesung ist ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit mit der arithmetischen Vielfachheit übereinstimmt.

Aus der Formel (1) folgt, dass $\mathrm{char}_f(X)$ genau dann in Linearfaktoren zerfällt, wenn $\mathrm{char}_{f|_{V_i}}(X)$ in Linearfaktoren zerfällt für jedes i. Sodann betrachte ein beliebiges $\lambda \in K$. Dann folgt aus (a) sowie dem Umstand, dass die geometrische Vielfachheit stets $\leqslant$ der arithmetischen Vielfachheit ist, dass diese Vielfachheiten für f genau dann übereinstimmen, wenn sie für jedes $f|_{V_i}$ übereinstimmen. Also ist f genau dann diagonalisierbar, wenn jedes $f|_{V_i}$ diagonalisierbar ist.

(c) Angenommen f und g sind simultan diagonalisierbar. Dann sind f und g auch separat diagonalisierbar. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V bestehend aus simultanen Eigenvektoren für f und g zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respektive $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Für jedes Element $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned} f\left(g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right)\right) \quad &= \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i v_i\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \lambda_i v_i \\ &= \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mu_i v_i \quad = \quad g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i\right) \quad = \quad g\left(f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f und g kommutieren.

Umgekehrt nehmen wir an, dass f und g kommutieren und separat diagonalisierbar sind. Weil f diagonalisierbar ist, existieren Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von f mit $V = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$. Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ und $v \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$ gilt wegen der Kommutativität von f und g:

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda_i v) = \lambda_i g(v)$$

und daher ist $g(v) \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$. Die Eigenräume von f sind somit g-invariant. Weil g diagonalisierbar ist, ist also auch $g|_{\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)}$ diagonalisierbar für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ nach Teil (b). Daher existiert eine Basis B_i von $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$ aus Eigenvektoren von g. Zusammen ist damit $B := B_1 \cup \cdots \cup B_r$ eine Basis von V aus simultanen Eigenvektoren von f und g; daher sind f und g simultan diagonalisierbar.

6. Seien K ein Körper und V ein n-dimensionaler Vektorraum über K, wobei $n > 0$ ist.

   (a) Sei T ein diagonalisierbarer Endomorphismus V mit nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerten λ_i für $1 \leqslant i \leqslant n$. Zeige

   $$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{und} \quad \det(T) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

   Für $0 \leqslant k \leqslant n$, sei c_k der Koeffizient von x^k im charakteristischen Polynom von T. Gibe eine Formel von c_k an, die nur von den Eigenwerten von T abhängt.

   (b) Sei $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar mit $\mathrm{Tr}(B) = 0$. Zeige $\det(B) \leqslant 0$.

Solution:

(a) Wir können das charakteristische Polynom von T schreiben als

$$\mathrm{char}_T(X) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X).$$

Aus dieser Formel folgt

$$c_k = (-1)^k \sum_{\substack{\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\} \in \{1,\ldots,n\}^{n-k} \\ i_r \neq i_s \text{ for } r \neq s}} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_{n-k}}$$

Insbesondere ist

$$c_0 = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $c_0 = \det(T)$ und $c_{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(T)$ sind. Dies zeigt die gewünschte Aussage.

Aliter: Da T diagonalisierbar ist, existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Spur und die Determinante einer Matrix Basisunabhängig sind, und somit folgt aus einer direkten Rechnung

$$\operatorname{Tr}(T) = \operatorname{Tr}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{and} \quad \det(T) = \det([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

(b) Da B diagonalisierbar ist können wir (a) benutzen und erhalten

$$\operatorname{Tr}(B) = 0 \iff \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = -\lambda_2,$$

wobei λ_i die Eigenwerte von B sind. Nochmal (a) benutzend erhalten wir

$$\det(B) = -\lambda_1^2 \leqslant 0$$

da $\lambda_1^2 \geqslant 0$ ist.